LE RETOUR DE LA GEOMETRIE

Dans la tradition de l'enseignement des mathématiques en France qui s'est établie depuis le XIX^{ème} siècle, la géométrie a joué un rôle important, s'appuyant sur les deux grands traités publiés au début du XIX^{ème} siècle, celui de Legendre et celui de Lacroix. Cette place importante de la géométrie s'appuyait, même lorsque certains aspects en étaient critiqués, sur la prégnance du modèle euclidien dans la construction de la science, et la rigueur du discours démonstratif euclidien faisait de l'enseignement de la géométrie le lieu de la formation de l'esprit rationnel comme cela fut souvent dit et écrit. C'est dans cette tradition que se situent les grands traités qui fondent l'enseignement de la géométrie jusqu'au milieu de notre siècle, le *Traité de Géométrie* de Rouché et Comberousse dans la seconde partie du XIX^{ème} siècle et les *Leçons de Géométrie* de Hadamard.

Cette place de la géométrie dans l'enseignement des mathématiques sera remise en cause dans les années soixante de notre siècle par le courant dit des mathématiques modernes. Se proposant de combler le lien entre les mathématiques enseignées et les mathématiques de la recherche (la science déjà faite et la science qui se fait, comme on disait alors), ce courant s'appuyait sur la méthode axiomatique de Hilbert et le point de vue des structures développé par Bourbaki, et en appelait aux conceptions pédagogiques de Piaget, lequel identifiait, quelque peu abusivement, le développement structural de la reconstruction bourbakiste et le développement de la connaissance géométrique chez l'enfant.

Nous ne reviendrons pas sur l'histoire de la réforme des mathématiques modernes et les critiques auxquelles elle a donné lieu. Disons seulement que la place de la géométrie s'est réduite, devenant un simple chapitre de l'algèbre linéaire (ce qu'elle est en effet d'un point de vue purement structural).

Aujourd'hui, après l'abandon de la réforme des mathématiques modernes, la géométrie reprend sa place dans l'enseignement des mathématiques comme on peut le voir à la lecture des programmes issus de la dernière en date des réformes (la réforme Chevènement mise en chantier en 1984). Mais ce retour de la géométrie correspond-il à un retour à la tradition présentée au début de cet article ou, du moins, à un retour à la place du savoir géométrique dans l'enseignement scientifique? une lecture attentive des programmes et des commentaires les accompagnant, ainsi que certaines pratiques pédagogiques nous conduisent à poser quelques questions sur la signification d'un tel enseignement: acquisition d'une connaissance de la géométrie élémentaire ou simple prétexte à pédagogie? quant à l'insistance sur le concret et la méfiance envers toute théorisation qui se manifeste autant dans les discours sur l'enseignement que dans certaines pratiques pédagogiques, elle pose la question même du sens d'un enseignement scientifique, nous y reviendrons.

Mais peut-être faut-il, avant de parler de l'enseignement d'un domaine de la connaissance, poser la question de la signification de ce domaine de la connaissance aujourd'hui.

En ce qui concerne la géométrie, il faut prendre en compte ce qu'on peut appeler une *dé géométrisation* du quotidien dans une société de plus en plus *numérisée* par l'informatisation. Nous pourrions citer la lecture numérique du temps via les cadrans à cristaux liquides qui se substitue à la lecture géométrique de la position des aiguilles sur le cadran d'une montre ou d'une horloge, nous pourrions citer aussi la pesée dans un supermarché, laquelle consiste à poser une marchandise sur un plateau, ce qui détermine l'apparition d'un nombre sur un cadran, savoir, le prix, pesée numérique qui remplace la pesée géométrique de la balance romaine ou de la balance de Roberval. Une telle dé-

géométrisation du quotidien ne saurait alors être sans conséquence sur les tendances de l'enseignement lui-même.

Cependant, à côté de cette dégéométrisation, la géométrie réapparaît sous une forme plus sophistiquée dans les domaines les plus avancés de la science et de la technologie; je citerai d'une part la géométrisation universelle que l'on rencontre dans divers domaines de la science d'aujourd'hui, d'autre part l'importance de la géométrie dans le nouveau domaine des images de synthèse.

Ainsi se mettent en place de nouvelles pratiques géométriques qui sont moins celles de la géométrie élémentaire (laquelle se fondait sur l'appréhension des situations spatiales et cette notion floue que l'on a appelé l'intuition géométrique) que celles liées à la géométrisation de certains domaines de la connaissance.

Pour préciser ce que nous entendons par cette géométrisation, nous reviendrons sur ces trois aspects de la géométrie que sont: la géométrie comme science autonome, savoir, la science des situations spatiales, la géométrie dans ses rapports avec les autres domaines de la connaissance, enfin la géométrie comme langage et comme représentation, ce que l'on peut appeler *l'aspect métaphorique* de la géométrie, lequel constitue le fondement de la géométrisation.

La géométrie comme science autonome s'est constituée autour de deux grandes problématiques: d'abord *la problématique de la mesure des grandeurs géométriques* (c'est-à-dire celles qui sont associées aux situations spatiales) qui est à l'origine de la géométrie grecque fondée sur le principe de l'égalité par superposition constituant ce corps de connaissances que l'on appelle aujourd'hui la géométrie élémentaire; ensuite *la problématique de la représentation plane des situations spatiales*, laquelle s'est développée avec les constructions perspectivistes du *Quattrocento* italien et qui a conduit à la géométrie projective.

Ce sont les problèmes posés à l'intérieur de ces deux grandes problématiques qui ont conduit à mettre en place ces diverses méthodes de la géométrie que sont le dessin, la démonstration à la grecque, la méthode des coordonnées, le calcul vectoriel et les méthodes de l'algèbre linéaire. Si ces deux grandes problématiques, à la fois par les problèmes qu'elles étudient et par les méthodes mises en jeu, sont étroitement liées, leur unification ne s'est faite que dans la seconde moitié du XIX^{ème} siècle avec le *Programme d'Erlangen* de Felix Klein qui a mis en évidence leur structure commune. Mais celle-ci ne prend sens que pour qui a déjà étudié la géométrie et qui, étudiant les deux grandes problématiques citées, s'est posé le problème de leur unité. Autant dire que l'enseignement de la géométrie, lors même qu'il se propose d'amener les élèves à comprendre le point de vue de la science d'aujourd'hui, doit s'appuyer sur l'étude des situations spatiales, que ce soit du point de vue de la mesure des grandeurs ou que ce soit du point de vue de la représentation. C'est sur ces objets, issus de la connaissance empirique, que sont les situations spatiales, que se construit la rationalité géométrique à travers les problématiques citées ci-dessus.

C'est parce que les situations spatiales interviennent dans d'autres lieux de la connaissance que la géométrie est liée à ces autres lieux de la connaissance, qu'elle détermine en partie le développement de ces divers domaines de la connaissance autant que ceux-ci interviennent dans le développement de la géométrie.

Nous ne pouvons donner ici une liste exhaustive de tous les domaines de la connaissance où intervient la géométrie, nous nous contenterons de citer ceux qui nous semblent les plus significatifs.

Citons d'abord la géographie et l'astronomie parce que les situations spatiales y jouent un rôle essentiel et que la géométrie s'est constituée en relation avec ces domaines: mesure de la terre (pour revenir à l'étymologie du terme géométrie) et représentation de la terre qui renvoient tout autant à la géométrie, à la géodésie et à la cartogra-

phie, étude géométrique des phénomènes célestes qui relie l'astronomie à la mesure des grandeurs et aux problèmes de représentation.

Mais il nous faut surtout citer les sciences physiques dont on peut dire que la géométrie est une partie. Le corpus euclidien lui-même ne constitue-t-il pas une physique théorique (au sens moderne du terme) et l'on peut rapprocher la construction de la rationalité des phénomènes géométriques par les mathématiciens grecs de celle de ces constructions rationnelles autour des phénomènes gravifiques ou électromagnétiques que seront plus tard la théorie de la gravitation universelle de Newton et la théorie de Maxwell, puis au XX^{ème} siècle, les théories d'Einstein.

La géométrie ne relève donc pas du seul domaine mathématique (au sens où on l'entend aujourd'hui) mais participe tout autant du domaine des sciences physiques. La distinction en une géométrie mathématique et une géométrie pratique, pour reprendre la distinction explicitée par Einstein est moderne, elle est née de la découverte (de l'invention!) des géométries non-euclidiennes mettant en évidence la multiplicité des géométries, ce qui posera le problème de l'autonomie de la géométrie par rapport au réel et conduira à redéfinir les conditions de la rationalité scientifique; cela se traduira, quant à la géométrie, par la construction hilbertienne.

Cette place de la géométrie dans la construction de la rationalité scientifique qui s'appuie à la fois sur le corpus euclidien et sur son dépassement (la construction hilbertienne) nous permet de définir (ou de redéfinir) la place de la géométrie dans l'enseignement scientifique, en précisant le lien entre l'enseignement de la géométrie (voire plus généralement des mathématiques) et l'enseignement des autres disciplines scientifiques. Cela implique que les divers domaines du savoir où la géométrie intervient soient abordés à l'intérieur du cours de géométrie, non comme de simples applications, mais comme une part constitutive de la connaissance géométrique. Cela implique aussi que la géométrie apparaisse dans l'enseignement des disciplines où elle intervient, non comme un simple outil technique à utiliser en cas de besoin, mais comme une part intégrante de ces disciplines.

Nous abordons maintenant ce troisième aspect de la géométrie que j'ai appelé l'aspect métaphorique, savoir, la géométrisation considérée comme *mode de représentation* de phénomènes qui, *a priori*, ne relèvent pas de la géométrie (au sens où celle-ci est l'étude des situations spatiales) ou comme *mode d'expression langagière* de ces mêmes phénomènes; qu'elle renvoie à des images ou qu'elle renvoie à un langage, la géométrisation permet une nouvelle approche et par conséquent une compréhension nouvelle des phénomènes étudiés, à la fois sur le plan de la rationalité (c'est-à-dire des modes de raisonnement) et sur le plan de l'intuition (un enrichissement de l'intuition, et c'est là le point le plus important de la géométrisation). Mais cette nouvelle approche ne prend sens (aussi bien pour ceux qui la construisent que pour ceux qui sont amenés à l'étudier) que parce qu'elle renvoie à cette connaissance première qu'est la géométrie élémentaire, géométrie de la mesure et du dessin dont nous avons déjà parlé; sans cette connaissance première, les métaphores géométriques perdent leur sens et l'on est renvoyé à la simple utilisation formelle de langages et de représentations pour laquelle la seule prise est le respect des règles et des procédures.

La géométrisation est déjà présente dans les mathématiques grecques avec la représentation des grandeurs par des longueurs (Cf. les livres arithmétiques des *Eléments* d'Euclide et les textes d'Archimède). On pourrait citer, parce qu'ils relèvent de la même problématique, les travaux d'Al-Khwarizmi et d'Omar Al-Khayyam concernant les équations du second et du troisième degré ainsi que les travaux d'Oresme sur la représentation de la variation d'une grandeur dépendant d'une autre grandeur (la représentation graphique des fonctions d'aujourd'hui). Mais c'est la méthode des coordonnées, c'est-à-dire l'utilisation du calcul algébrique de Viète pour la résolution des problèmes

de géométrie par Descartes et Fermat qui conduira en retour à l'étude géométrique des équations. Ainsi se mettait en place ce qu'on appelle, non sans quelque ambiguïté, l'unification des mathématiques à travers ces deux courants inséparables que sont l'algébrisation de la géométrie et la géométrisation de l'algèbre.

En ce qui concerne la géométrisation, nous citerons les deux grands textes qui la fondent telle qu'elle est aujourd'hui, d'abord celui de Riemann *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie* (1854) puis celui de Klein connu sous le nom de *Programme d'Erlangen* (1872).

Le texte de Riemann, l'un des textes les plus profonds de l'histoire de la géométrie, à la fois intuitif et abstrait, avec l'introduction de ce qu'on appelle communément les espaces abstraits et par l'élargissement de l'intuition géométrique usuelle qu'il propose, est à la source de la géométrisation de la physique contemporaine; nous ne pouvons développer ceci dans cet article, renvoyant à l'article cité de Houzel dans *Universalia* 1991.

Quand au *Programme d'Erlangen*, en mettant l'accent sur ce qu'on appelle aujourd'hui les équivalences de structures, il introduit le point de vue structural moderne; mais si la notion d'équivalence de structures permet d'éliminer l'aspect intuitif de la géométrie, les propriétés d'icelle et les méthodes de démonstration se rapportant à la structure sous-jacente via la théorie des groupes, cette notion, dans la mesure où elle permet de transporter le raisonnement d'un domaine à l'autre, permet en retour de transporter l'intuition, prolongeant ainsi le point de vue de Riemann.

Ce double aspect de la géométrisation, méthode de construction rationnelle de la connaissance d'une part et d'autre part lieu d'élaboration de nouvelles formes d'intuition, s'est développé ces dernières années dans des domaines aussi divers que la théorie des équations avec la géométrie algébrique et la géométrie différentielle, la théorie des fonctions avec l'analyse fonctionnelle (l'étude des *espaces* de fonctions, et il faut souligner ici la charge intuitive du mot espace), la physique contemporaine dont nous soulignerons les liens étroits qui se sont tissés autour des travaux de Riemann et d'Einstein; et nous pouvons rappeler l'importance des représentations géométriques dans la théorie des probabilités et les statistiques.

Notons qu'il s'agit moins de l'interdisciplinarité aujourd'hui à la mode que de la construction de la connaissance à partir des problématiques qui la fondent. Mais peut-être faut-il voir d'abord dans cette géométrisation la mise en place de nouvelles formes d'intuition, si l'on considère que la connaissance intuitive est la seule véritable connaissance et que le détour rationnel, s'il est une étape essentielle de la construction de la connaissance, n'en est qu'une étape, et que l'on ne possède la connaissance d'une discipline que via cette appréhension globale que constitue la connaissance intuitive. C'est Felix Klein qui écrit dans l'une des notes qui terminent le *Programme d'Erlangen*:

"Il ne faut toutefois pas se départir de cette prescription qu'une question mathématique ne doit pas être considérée comme complètement épuisée alors qu'elle n'est pas encore devenue intuitivement évidente; découvrir au moyen de l'analyse, c'est faire un pas très important, mais ce n'est que faire le premier pas."

Si l'un des objectifs du mathématicien est la construction de cet *intuitivement évident* qui seul assure la connaissance, l'enseignement des mathématiques a, parmi ses objectifs, d'amener l'élève à construire ses propres formes d'intuition, la géométrie étant l'un des lieux privilégiés de cette construction. Mais cela suppose que l'enseignement de la géométrie repose sur l'étude des situations spatiales autant pour leur intérêt propre que dans les divers lieux où elles interviennent, rappelant que c'est à travers leur étude que se constitue l'intuition géométrique.

La question est alors de savoir dans quelle mesure le retour de la géométrie dans l'enseignement, tel qu'il apparaît aujourd'hui, permet la construction de cette intuition

géométrique, d'une part l'intuition géométrique des situations spatiales, d'autre part celle de la géométrisation, ce que Dieudonné appelle les transferts d'intuition.

Si l'enseignement des mathématiques a su se débarrasser du formalisme de la réforme des mathématiques modernes, et en particulier réintroduire l'étude des situations spatiales en tant que telles, la géométrie enseignée reste encore enfermée dans une opposition *concret/abstrait* qui ne semble pas toujours pertinente. En opposition à la période des mathématiques modernes considérées comme trop abstraites, l'enseignement d'aujourd'hui se voudrait plus concret (comme l'expliquent les commentaires accompagnant le libellé des programmes). Ceci laisse entendre que la géométrie élémentaire serait concrète par opposition à la géométrie plus sophistiquée des mathématiques d'aujourd'hui, erreur d'ordre historique qui oublie que la science grecque s'est constituée comme *abstraction* et que c'est cela qui en fait son caractère scientifique, mais aussi erreur épistomologique et pédagogique qui réduit le rapport concret/abstrait à une simple progression dans le temps, indépendamment des problématiques sur lesquelles se construit la connaissance.

Mais c'est peut-être que, loin de la science (la science déjà faite ou la science qui se fait) l'enseignement scientifique d'aujourd'hui se définit moins en fonction des connaissances que l'on veut transmettre aux élèves qu'en fonction de critères dits pédagogiques qui sont autant de préjugés correspondant aux idées que l'on se fait des élèves; c'est en ce sens que la science enseignée est souvent une science reconstituée à l'usage des élèves, ce que certains ont appelé la transposition didactique, comme si les enjeux de la science ne participaient pas de l'enseignement d'icelle.

Le retour de la géométrie qui apparaît ainsi à travers le renouvellement des contenus via les réformes qui ont suivi celle des mathématiques modernes (la réforme Haby puis la réforme Chevènement) reste ainsi à mi-chemin; peut-être parce que l'on a pas osé un retour à une géométrie élémentaire qui mêlait, au sens que dit Gonseth, les trois aspects de la connaissance que sont l'aspect intuitif, l'aspect expérimental et l'aspect théorique, se contentant de mettre en avant, en suivant les exigences des modes idéologiques, tantôt l'aspect dit théorique, tantôt l'aspect dit expérimental (sans toutefois expliciter les enjeux de ces aspects), avec une méfiance pour l'aspect intuitif, considéré comme trop flou pour participer de l'apprentissage et surtout réfractaire aux méthodes objectives de l'évaluation. Mais c'est aussi qu'un enseignement scientifique prenant en compte les trois aspects dont parle Gonseth est difficile sinon impossible dans un contexte qui ignore les conditions mêmes de la construction de la science, ne voyant dans la connaissance scientifique que son aspect procédurier pour résoudre quelques problèmes posés *a priori*. Dans un tel contexte, la géométrisation ne peut apparaître que comme la mise en place de nouvelles procédures, à l'opposé de cet intuitivement évident qui seul assure la possession d'un savoir.

C'est en réaction à cet enseignement formel (celui du discours ou celui des activités, comme on dit aujourd'hui) que s'est mis en place ce qu'on appelle *une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques* dont l'ambition est, en portant l'intérêt sur les problématiques, de retrouver le sens des mathématiques enseignées. Dans une telle perspective, qui réintègre les enjeux de la science dans l'enseignement, le retour de la géométrie, malgré le pédagogisme ambiant et malgré le caractère formel d'un enseignement qui oscille entre l'illusion langagière du discours et l'activisme pédagogique autour d'un pseudo-concret, reste porteur d'une transmission d'un savoir qui ne se réduise pas à la seule transmission d'un discours. Si tant est que l'un des objectifs de l'enseignement est de permettre l'accès au savoir aux nouvelles générations, mais c'est l'un des points fondamentaux d'une éthique de l'enseignement.

professeur de mathématiques
à l'Université de Lille I

Bibliographie

- R. Bkouche, B. Charlot, N. Rouche, *Faire des Mathématiques, le plaisir du sens*, Armand Colin, Paris 1991
- N. Bourbaki, "L'architecture des mathématiques" in *Les grands courants de la pensée mathématique*, Cahiers du Sud, 1948; nouvelle édition, Blanchard, Paris 1962
- N. Bourbaki, *Eléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, Paris 1974
- Y. Chevallard, *La transposition didactique*, La Pensée Sauvage, Grenoble 1985
- J. Dieudonné, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, Hermann, Paris 1964
- J. Dieudonné, *The universal domination of the geometry*, International Congress of Mathematical Education, Berkeley 1980
- A. Einstein, "La géométrie et l'expérience" (1921) (traduction Solovine) in *Réflexions sur l'électrodynamique, l'éther, la géométrie et la relativité*, Gauthier-Villars, Paris 1972
- F. Gonseth, *La géométrie et le problème de l'espace*, Editions du Griffon, Neuchâtel 1945/1955
- D. Hilbert, *Les fondements de la géométrie* (1899) (traduction Rossier), Dunod, Paris 1970
- F. Klein, *Le Programme d'Erlangen* (1872) (traduction Padé), Gauthier-Villars, Paris 1974
- B. Riemann, "Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie" (1854) (traduction Hoüel) in *Oeuvres Mathématiques*, Blanchard, Paris 1968
- J. Piaget, *Introduction à l'épistémologie génétique*, P.U.F., Paris 1973
- Commission Inter-IREM Epistémologie, *Pour une perspective historique dans l'enseignement mathématique*, IREM de Lyon, 1988
- E.U. Article "Géométrie"
Universalialia 1991, "Géométrie et Physique", Ch. Houzel