Quelques remarques autour des cas d'égalité des triangles

rudolf bkouche
irem de lille

> *"Il est plus aisé de suivre dans l'histoire les sauts accomplis dans les sciences empiriques et dans les humanités que de répondre à la toute simple question : comment se fait-il que Galilée et Newton ont laissé sur le carreau d'un massacre épistémologique la physique aristotélicienne alors que les démonstrations d'Euclide, elles, gardent toute leur validité?"*[1]
>
> Leszek Kolakowski

De l'enseignement de la géométrie aujourd'hui.

Faut-il se réjouir de la réintroduction des cas d'égalité et des cas de similitude dans les programmes de l'enseignement secondaire?

Il s'agit moins de répondre à la question ainsi posée que d'analyser les conditions de cette réintroduction. S'agit-il seulement d'ajouter quelques énoncés de plus pour permettre quelques activités supplémentaires ou s'agit-il d'une refonte permettant de retrouver le sens oublié de la géométrie?

Les cas d'égalité ont disparu avec la réforme dite des *mathématiques modernes*. Dans le contexte alors proposé, cette disparition participait d'une cohérence inhérente aux conceptions formalistes qui sous-tendaient la réforme. La question était moins celle des cas d'égalité des triangles que celle d'une conception générale de la géométrie et de son enseignement. Que cette conception ait pu relever d'un contre-sens épistémologique et didactique n'enlève rien à la cohérence globale de la réforme[2]. En oubliant le dualisme hilbertien entre la logique et l'intuition tel que Hilbert le proclame dans la préface de *Geometry and Imagination* lorsqu'il écrit:

*"In mathematics, as in any scientific research, we find two tendencies present. On the one hand, the tendency toward **abstraction** seeks to crystallise the **logical** relations inherent in the maze of material that is being studied, and to correlate the material in a systematic and orderly manner. On the other hand, the tendency toward **intuitive understanding** fosters a more immediate grasp of the objects one studies, a live **rapport** with them, so to speak, which stresses the concrete meaning of their relations."*[3]

on passait du formalisme comme méthode au formalisme comme principe de l'activité mathématique, ce que confortait la phrase ambiguë de Cavaillès déclarant, à propos de l'axiomatique euclidienne:

---

[1]Leszek Kolakowski, *Horreur métaphysique* (traduit de l'anglais par Michel Barat), Payot, Paris 1989, p. 13

[2]Pour une critique de la réforme des mathématiques modernes nous renvoyons à notre article "L'enseignement des mathématiques en France" in *La Science au présent*, Encyclopædia Universalis, Paris 1993

[3]David Hilbert, S. Cohn-Vossen, *Geometry and Imagination,* translated by P. Nemenyi, Chelsea, New York 1952, preface. Notons qu'il n'est pas innocent que ce livre n'ait jamais été traduit en français.

"De là à considérer que seule la méthode axiomatique peut fonder et étendre le travail mathématique, parce qu'elle exprime son essence, il n'y avait qu'un pas, qui fut fait en 1899"[4]

Le débat sur l'enseignement de la géométrie se déplaçait ainsi autour du choix d'une axiomatique; ainsi, à Choquet qui proposait une axiomatique géométrique dans un style proche de celui de Hilbert[5], Dieudonné opposait l'axiomatique techniquement plus simple issue de l'algèbre linéaire[6]. Et l'on pouvait discuter longtemps, ce que l'on fit, sur le choix de la meilleure axiomatique pour l'enseignement.

La contre-réforme qui suivit se montra incapable de prendre en charge la question, oscillant entre la peur de l'archaïsme et le refus de toute théorisation. C'est ainsi que l'on peut comprendre la dégradation de l'enseignement de la géométrie qui se poursuit jusqu'à aujourd'hui, la mise en retrait de la démonstration pouvant être considérée comme l'exemple paradigmatique de cette dégradation. Signe de cette dégradation, la disparition de l'énoncé du postulat des parallèles et de son rôle dans l'élaboration de la géométrie élémentaire, en particulier dans la démonstration de ces deux théorème fondamentaux que sont le théorème de Thalès et le théorème de Pythagore.

Il est vrai que l'on utilise, à juste titre, les aires pour démontrer ces théorèmes; mais se souvient-on que l'usage des aires (la méthode des aires développées par le corpus euclidien) repose essentiellement sur le postulat des parallèles? Autrement dit, cet usage des aires n'est à aucun moment légitimé dans l'enseignement. On peut comprendre que, dans un premier temps, cet usage des aires se réduise au seul aspect *puzzle*, autrement dit à la décomposition et la recomposition des figures, d'autant que cet aspect *puzzle* permet la mise en place de raisonnements qui marquent les premiers pas de la méthode déductive; il reste qu'il faut bien que ces raisonnements soient légitimés et en ce sens la construction euclidienne nous apprend les développements théoriques nécessaires à cette légitimation, en particulier le rôle du postulat des parallèles. On pourrait par exemple utiliser les *puzzles* pour comparer ou calculer des aires au cours des deux premières années de collège et montrer en quatrième comment le postulat des parallèles permet de légitimer la méthode.

Si l'on remarque le rôle que jouent les parallélogrammes dans l'enseignement de la géométrie au collège, on ne comprend pas la disparition d'un énoncé explicite du postulat des parallèles. Il y a dans les programmes deux définitions des parallélogrammes, la première énonce qu'un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles, la seconde énonce qu'un parallélogramme est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu. Ces deux définitions sont importantes, la seconde permettant de prendre en compte les parallélogrammes aplatis. Se pose alors une question: en quoi ces deux définitions sont-elles équivalentes? On ne voit pas comment on peut ici se passer du postulat des parallèles.

En outre, l'étude des translations demande de montrer la proposition suivante (composition des parallélogrammes):

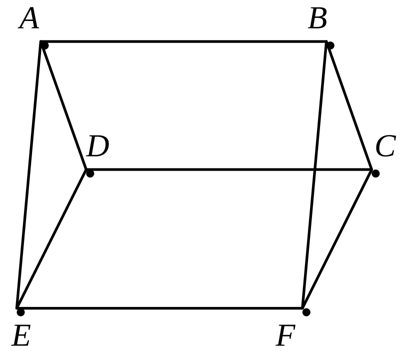
"Si ABCD est un parallélogramme et si CDEF est un parallélogramme, alors ABFE est un parallélogramme".

---

[4]Jean Cavaillès, *Méthode axiomatique et formalisme* (1937), ré-édition avec une introduction de Jean-Toussaint Desanti et une préface de Henri Cartan, Hermann, Paris 1981, p. 75

[5]Gustave Choquet, *L'enseignement de la géométrie*, Hermann, Paris 1964

[6]Jean Dieudonné, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, Hermann, Paris 1964



C'est cette proposition qui assure d'une part l'existence de translations, d'autre part que la composée de deux translations est une translation. Cette proposition est une conséquence du postulat des parallèles.

Les discussions avec des capétiens m'ont montré combien peu étaient conscients de ce problème, certains me faisant remarquer que la seconde définition des parallélogrammes ne faisait pas appel à la notion de parallèle. En fait ils ignoraient le rôle du postulat des parallèles dans la démonstration de la proposition ci-dessus rappelée; mais savaient-ils qu'il fallait la démontrer?

La seconde définition peut être donnée en géométrie hyperbolique auquel cas la proposition de composition des parallélogrammes n'a pas lieu[7]. On voit ainsi comment la géométrie euclidienne et l'existence de translation sont liées.

Il me semble grave que cette liaison soit ignorée des futurs professeurs de mathé-matiques sous prétexte que la géométrie non-euclidienne n'est pas enseignée au collège et au lycée. C'est la culture des professeurs qui est en cause; mais parler de la culture des professeurs doit relever de l'archaïsme.

Enfin pour en terminer avec le postulat des parallèles et les conséquences de son ignorance, nous citerons certains manuels qui trouvent intéressant de montrer le théorème de la droite des milieux "par le calcul vectoriel", utilisant la relation

$$\frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \frac{1}{2}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}$$

oubliant ainsi que cette relation est conséquence du théorème de Thalès, lequel est conséquence du théorème de la droite des milieux.

Tout cela pour dire l'inconsistance d'un enseignement de la géométrie où la cohérence du discours a disparu. C'est la rationalité même de la pensée mathématique qui est en cause, mais peut-être plus encore toute forme de rationalité. Il est vrai que pour certains pédagogues "progressistes" la rationalité semble avoir été essentiellement l'affaire des jeunes bourgeois qui fréquentaient le lycée à l'époque où celui-ci ne s'adressaient qu'aux enfants de la bourgeoisie, et l'ouverture de l'enseignement à tous les enfants nous dispense de cette éducation à la rationalité; la démocratisation de l'enseignement ne saurait ainsi se faire que contre le savoir et la pensée. Il suffit

[7]On utilise souvent la propriété (admise) qu'une symétrie centrale transforme une droite en une droite parallèle, mais cette propriété reste vrai en géométrie hyperbolique. La seconde définition des parallélogrammes peut être donnée en géométrie hyperbolique; la figure ainsi définie possède certaines propriétés des parallélogrammes, telle le fait que les côtés opposés soient égaux par exemple, et les démonstrations sont les mêmes en géométrie euclidienne et en géométrie hyperbolique; la question se pose alors de savoir à quelle moment le discours géométrique permet de distinguer les deux géométries, l'euclidienne et l'hyperbolique. C'est alors la propriété de composition des parallélogrammes qui permet de distinguer géométrie euclidienne et géométrie hyperbolique.

pourtant d'aller regarder du côté de l'enseignement primaire supérieur pour voir que, à l'époque des réseaux PP et SS[8], on ne considérait pas que la rationalité était réservé à la seule élite.

On ne peut cependant rester à ce constat de dégradation de l'enseignement. Si l'on pense que l'enseignement mathématique doit être préservé, mais peut-être plus encore, si l'on pense que le caractère de *sapiens sapiens* de notre espèce participe de notre humanitude et doit être préservé, on ne peut s'en tenir à la seule aune des programmes actuels et il devient nécessaire de revenir à la signification des mathématiques tels que les hommes les ont construites au cours des siècles[9].

Quelles que soient les raisons des fabricants de programmes, y compris les choix ministériels, il est nécessaire de penser les cas d'égalité ou de similitude dans leur signification géométrique, y compris dans l'enseignement. Rien ne saurait nous interdire, et surtout pas les normes sociales aujourd'hui en vigueur, de penser l'enseignement d'un domaine de la connaissance comme si le premier objectif de cet enseignement était de donner aux élèves les moyens intellectuels d'appréhender ce domaine de la connaissance. On peut considérer une telle position comme un acte de résistance à cette mort programmée du *sapiens sapiens*, à cette déshumanisation de l'homme que l'on nous propose aujourd'hui sous le prétexte d'adapter les jeunes générations à la société contemporaine[10].

Du mouvement et de l'égalité

"Geometry is a physical science" écrit Clifford dans son ouvrage *the commun sense of the exact sciences*[11].

En affirmant que la géométrie est une science physique, on rappelle que la géométrie a pour objet l'étude des corps et particulièrement de ceux qui ne changent pas de forme et de grandeur lorsqu'ils se meuvent, c'est-à-dire les *corps solides*.

L'un des premiers problèmes que pose la géométrie est alors celui de préciser la notion de *"même forme et même grandeur"* en explicitant des règles permettant d'affirmer que deux corps ont même forme et même grandeur. C'est l'objet du principe de l'égalité par superposition tel que l'énonce Euclide dans ses *Eléments* et que nous énoncerons sous la forme suivante:

"Deux objets que l'on peut superposer sont égaux"

L'opération de superposition suppose le mouvement; on voit ainsi le rôle du mouvement dans la mise en place de la géométrie. Cependant l'énoncé même du principe de l'égalité par superposition marque les limites d'application de ce principe. En effet si l'on peut montrer l'égalité de deux figures planes en les superposant (par exemple deux triangles ou deux quadrilatères), il est impossible de montrer l'égalité de deux cubes en bois en les superposant. En fait, dans le cas de solides, on pourrait dire

---

[8]La distinction des réseaux PP (primaire-professionnel) et SS(secondaire-supérieur) est définie dans l'ouvrage de Christian Baudelot et Roger Establet, *L'Ecole Capitaliste en France*, Editions Maspéro, Paris 1971.

[9]Notons que la pauvreté intellectuelle des programmes couvre l'ensemble des disciplines, mais il est vrai que la notion même de discipline est dépassée selon certains "penseurs" de la modernité comme nous l'apprend un récent ouvrage d'Edgar Morin (*La tête bien faite*, Editions du Seuil, Paris 1999).

[10]Jean-Pierre Le Goff, *La barbarie douce*, La Découverte, Paris 1999

[11]William K. Clifford, *the commun sense of the exact sciences*, Dover, New York 1955, p. 43. L'ouvrage de Clifford a été publié après sa mort en 1885 par Pearson, le chapitre "Space" dont est extrait l'assertion citée a été écrit en 1875 (cf. la préface de Pearson, p. lxiii)

que deux corps sont égaux lorsqu'ils peuvent occuper la même place dans l'espace, mais la vérification d'une telle propriété est complexe.

On voit ainsi apparaître la nécessité de donner des critères de superposabilité, c'est-à-dire des conditions qui assurent que deux objets sont superposables sans qu'il soit nécessaire de réaliser matériellement l'opération de superposition. Il faut voir dans l'explicitation de telles conditions le commencement de la géométrie rationnelle.

C'est de ce point de vue qu'il faut entendre les classiques cas d'égalité des triangles et c'est en ce sens qu'ils ont leur place dans le premier enseignement de la géométrie rationnelle.

La question se pose alors du mode de légitimation de tels énoncés. Nous distinguerons ici les modes de légitimation empiriques (le simple constat, avec du papier calque par exemple, que l'égalité de certains éléments implique que deux triangles sont superposables) et les modes de légitimations rationnels (les démonstrations), c'est-à-dire s'appuyant sur un discours convenablement réglé.

Nous nous intéressons ici aux seuls modes de légitimations rationnels. Notons d'abord que ceux-ci se sont transformés au cours de l'histoire ce qui pose la question des raisons de ces transformations. Nous n'aborderons pas ici ce problème, renvoyant à un article à paraître[12], nous nous contentons ici de comparer les diverses démonstrations des cas d'égalités des triangles, essentiellement celles d'Euclide et de ses successeurs d'une part et celles de Hilbert d'autre part.

Les démonstrations euclidiennes

Si le principe de l'égalité par superposition fait appel au mouvement, il permet en même temps de l'éliminer. De façon précise, si, dans l'ouvrage d'Euclide, la démonstration du premier cas d'égalité des triangles fait appel explicitement au principe de l'égalité par superposition et par conséquent au mouvement, l'énoncé de ce premier cas d'égalité permet de se débarrasser du mouvement.

Rappelons que les raisons qui ont conduit à l'élimination du mouvement ne relèvent pas des seules mathématiques. Les paradoxes de Zénon avaient pour objet moins de nier le mouvement que de montrer les difficultés liés à son expression langagière; si la rationalité se construit à travers le bon usage du langage pour dire le monde, le mouvement devient ainsi obstacle au développement de la rationalité et ne peut être objet de science. La science grecque suppose ainsi une séparation entre *ce qui est* et *ce qui devient*, seul ce qui est pouvant être objet de science. C'est en ce sens qu'il faut comprendre comment la géométrie en tant qu'elle est science des corps solides, c'est-à-dire des corps dont la forme et la grandeur ne changent pas au cours d'un mouvement, s'appuie sur le mouvement en même temps qu'elle s'en dégage.

L'élimination du mouvement apparaît ainsi comme une étape nécessaire à la construction d'une science rationnelle. A l'appui de cette thèse nous pouvons citer l'échec de la tentative aristotélicienne de construire une physique déductive, c'est-à-dire une science de la nature dont les vérités puissent être déduites par le seul raisonnement à partir de quelques principes. La physique déductive naîtra plus tard lorsque celle-ci deviendra, comme la géométrie, une science de l'Etre (au sens grec du terme) construisant un temps indépendant de tout devenir pour n'être plus qu'un objet géométrique; c'est ainsi que l'on peut entendre la définition newtonnienne du temps:

---

[12]Rudolf Bkouche, "La démonstration: du réalisme au formalisme" in Actes des Journées Académiques *Mathématiques et Philosophie*, IREM de Lille 1997 (à paraître).

"Absolute, true, and mathematical time, of itself, and from its own nature, flows equally without relation to anything external …"[13]

définition qui participe de ce que l'on peut appeler la *géométrisation* de la physique. Cette géométrisation qui marque le développement de la physique moderne comme science déductive au sens des *Seconds Analytiques*[14], nous rappelle aussi la part d'empirisme qui préside au début de la géométrie[15]. La géométrie déductive est ici moins refus de l'empirisme que dépassement de l'empirisme, autrement dit reconstruction de la connaissance empirique. C'est en ce sens que les cas d'égalité des triangles, en particulier le premier, marquent un point essentiel de la construction de la rationalité géométrique; c'est en ce sens que les cas d'égalité des triangles ont leur place dans l'enseignement de la géométrie.

Nous rappelons ci-dessous les énoncés des trois cas d'égalité des triangles:

Théorème: *Soient deux triangles ABC et A'B'C' tels que les angles BAC et B'A'C' soient égaux, les côtés AB et A'B' soient égaux et les côtés AC et A'C' soient égaux, alors les triangles ABC et A'B'C' sont égaux.*

Théorème: *Soient deux triangles ABC et A'B'C' tels que les côtés BC et B'C' soient égaux, les angles ABC et A'B'C' soient égaux et les angles ACB et A'C'B' soient égaux, alors les triangles ABC et A'B'C' sont égaux.*

Théorème: *Soient deux triangles ABC et A'B'C' tels que les côtés AB, BC, CA soient respectivement égaux aux côtés A'B', B'C', C'A', alors les triangles ABC et A'B'C' sont égaux.*

Si l'égalité des triangles implique six égalités, trois égalités de côtés et trois égalités d'angles, les cas d'égalité nous disent que trois de ces égalités convenablement choisies impliquent non seulement les trois autres égalités mais aussi la possibilité de superposer les triangles. Nous verrons ci-dessous comment ces énoncés peuvent être rattachés au *Programme d'Erlangen* de Felix Klein, c'est en ce sens que l'on peut parler de la modernité des cas d'égalité des triangles et plus généralement de la modernité de la géométrie élémentaire ce qui répond en partie à la question de Kolakowski citée en exergue.

Nous rappelons ici l'énoncé et la démonstration du premier cas d'égalité des triangles qui constitue la proposition 6 du Livre I des *Eléments*.

"Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et s'ils ont un angle égal à un angle, ils auront aussi la base égale à la base, les triangles seront égaux et les angles restants seront égaux aux angles restants, chacun à chacun, c'est-à-dire ce que les côtés égaux sous-tendent.

"Soient deux triangles ABC, DEF ayant les deux côtés AB, AC égaux aux deux côtés DE, DF, chacun à chacun, d'une part AB à DE, d'autre part AC à DF, ainsi que l'angle BAC égal à l'angle EDF.

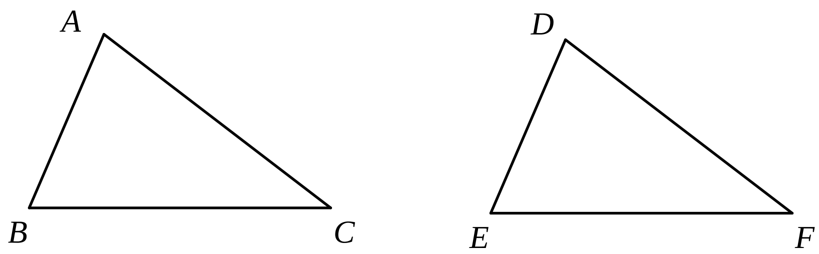
---

[13]Isaac Newton, *Principia* (1687) (Motte's translation revised by Cajori), University of California Press, Berkeley, Los Angeles, London 1934/1962, p. 6

[14]En cela la science moderne continue l'idéal aristotélicien. La rupture, si rupture il y a, viendra plus tard avec les conceptions hilbertiennes comme nous le verrons ci-dessous.

[15]rappelons que Newton définissait la géométrie comme *that part of universal mechanics which accurately proposes and démonstrates the art of measuring"* (Newtion, o.c. p. xvii)

Je dis que la base BC aussi est égale à la base EF, et le triangle ABC sera égal au triangle DEF, et les angles restants seront égaux aux angles restants, chacun à chacun, c'est-à-dire ceux que les côtés égaux sous-tendent, d'une part celui sous ABC à celui sous DEF, d'autre part celui sous ACB à celui sous DFE.



En effet, le triangle ABC étant appliqué sur le triangle DEF, d'une part le point A étant posé sur le point D, d'autre part la droite AB sur DE, le point B aussi s'ajustera sur le point E parce que AB est égale à DE. Alors AB étant ajustée sur DE, la droite AC s'ajustera sur DF parce que l'angle sous BAC est égal à celui sous EDF. De sorte que le point C aussi s'ajustera sur le point F parce que, de plus, AC est égale à DF. Mais B a aussi été ajusté sur E. De sorte que la base BC s'ajustera sur la base EF et lui sera égale. De sorte que tout le triangle ABC s'ajustera aussi sur tout le triangle DEF et lui sera égal, et les angles restants s'ajusteront sur les angles restants et leur seront égaux, d'une part celui sous ABC à celui sous DEF, d'autre part celui sous ACB à celui sous DFE."[16]

On voit ici comment le raisonnement s'appuie d'une part sur le principe de l'égalité par superposition qui fixe les conditions de l'égalité des figures, d'autre part sur les éléments de la figure. En ce sens le raisonnement marque ses sources empiriques en même temps qu'il propose un dépassement de l'empirisme.

On peut considérer en effet la démonstration du premier cas d'égalité des triangles comme décrivant une suite d'opérations sur les deux triangles en question. Le discours démonstratif s'appuie explicitement sur les objets (les triangles) représentés par une figure, elle-même *matériellement* représentée par un dessin[17]; c'est en ce sens que l'on peut parler d'une *lecture raisonnée du dessin*. C'est alors l'activité de raisonnement qui permet de dépasser le dessin pour en faire d'abord la figure, c'est-à-dire le dessin questionné, ensuite l'objet idéal (*l'idéalité mathématique*), autrement dit la construction de l'objet mathématique. Ainsi le raisonnement se définit par rapport à l'objet en même temps que l'objet se construit avec le raisonnement.

Notons que, une fois la proposition 4 démontrée, il n'est plus besoin de recourir au mouvement pour démontrer les autres cas d'égalité (proposition 8 et proposition 26). Pour l'étude de ces démonstrations nous renvoyons au texte d'Euclide.

La construction hilbertienne

A côté de la démonstration euclidienne que l'on retrouve telle quelle dans la plupart des traités classiques de géométrie élémentaire, nous rappelerons la démonstration hilbertienne correspondante, ce qui nous conduiras à préciser en quoi elles se ressemblent et en quoi elles diffèrent. Nous n'aborderons pas ici les raisons qui

[16]*ibid*, p. 201-202

[17]Sur la définition de la figure et sa relation au dessin, nous renvoyons à notre article "De la démonstration en géométrie" in *Le Dessin géométrique, de la main à l'ordinateur*, Colloque Inter-IREM Géométrie, (Le Quesnoy 1994), IREM de Lille 1996

ont conduit au point de vue hilbertien renvoyant à mon article cité "La démonstration: du réalisme au formalisme".

Dans *Les Fondements de la Géométrie*, Hilbert explique que la géométrie est l'étude de trois systèmes de choses qu'il introduit ainsi:

"*Nous pensons trois sortes de choses; nous nommons les choses du premier système des* ***points****; nous les désignons par des lettres majuscules* **A**, **B**, **C**, …; *nous nommons* ***droites*** *les choses du deuxième système et nous les désignons par des minuscules a, b, c, …*; *nous appelons* ***plans*** *les choses du troisième système et nous les désignons par des caractères grecs* α, β, γ,…"[18]

il ne donne aucune définition de ces choses, seulement une façon de les nommer et de les noter; points droites et plans ne sont que des mots et ne renvoient à aucune signification antérieure à leur usage[19].

Hilbert poursuit:

"Entre les points, les droites et les plans, nous imaginons certaines relations que nous exprimons par des expressions telles que «être sur», «entre», «congruent»; la description exacte et appropriée au but des mathématiques de ces relations est donnée par les axiomes de la géométrie."

Ici encore les termes «être sur», «entre», «congruent» n'ont d'autre signification que de participer à l'énoncé des axiomes.

Les axiomes expriment les relations entre les termes primitifs, relations à partir desquelles pourra s'élaborer le raisonnement déductif. Hilbert énonce vingt-trois axiomes répartis en cinq groupes correspondants aux différents types de relations: appartenance, ordre, congruence, parallélisme, continuité, mais ici encore, ces termes ne renvoient à aucune signification antérieure à leur usage et ne sont que des constituants du discours géométrique.

Une fois les axiomes énoncés, la géométrie se développe selon des règles logiques explicites qui régissent l'usage des termes et des énoncés, une démonstration ne s'appuyant que sur les axiomes, les propositions antérieurement démontrées et les règles logiques; ainsi tout recours à l'intuition ou à la signification des règles et des énoncés est éliminée.

Dans un tel cadre, le mouvement n'a plus sa place, même implicite. Pour définir l'égalité, Hilbert introduit la notion de congruence pour les segments et pour les angles définissant ainsi deux relations d'équivalences respectivement sur les segments et sur les angles; il complète ces définitions en énonçant deux axiomes de report[20]:

axiome III,1: *Si A et B sont deux points d'une droite a et A' un point de cette droite ou d'une autre droite a'; sur a', d'un côté donné de A', on peut trouver un point B' tel que le segment AB soit congruent (ou égal) au segment A'B'.*[21]

---

[18]David Hilbert, *Les Fondements de la Géométrie* (1899) (édition critique préparée par Paul Rossier), Dunod, Paris 1971, p. 11

[19]On connaît la boutade attribuée à Hilbert qui propose de remplacer les termes points, droites, plans par tables, chaises et verres de bières; la construction n'aurait changée en rien du point de vue de la structure du discours.

[20]David Hilbert, o.c. p. 20-23

[21]On peut comparer cet axiome à la proposition 2 du Livre I des *Eléments* d'Euclide qui montre comment on peut mener d'un point donné une droite égale à une droite donnée.

Notons que Hilbert ne suppose pas l'unicité du point B' qu'il démontrera ultérieurement (cf. ci-dessous).

axiome III,4: *Soient un angle (h,k) d'un plan* α *et une droite a' d'un plan* α' *ainsi qu'un côté donné de a' dans* α'[22]. *Désignons par h' une demi-droite portée par a' issue du point O', dans le plan* α' *il existe une unique demi-droite k' telle que l'angle (h,k) est congruent à l'angle (h',k') et dont l'intérieur est du côté donné de la droite a'.*

Les axiomes de report remplace ainsi le principe de l'égalité par la superposition. Cependant le report, sous la forme ci-dessus énoncée, ne suffit pas à montrer les cas d'égalité des triangles et Hilbert doit énoncer l'axiome suivant

axiome III,5: *"Si dans deux triangles ABC et A'B'C' les congruences suivantes sont satisfaites:*

$$AB \equiv A'B' \qquad AC \equiv A'C' \qquad \angle BAC \equiv \angle B'A'C'$$

la congruence suivante $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ *l'est aussi"*[23]

On peut noter que cet axiome exprime la première partie de la démonstration euclidienne; notons qu'un simple changement de désignation implique la congruence

$$\angle ACB \equiv \angle A'C'B'$$

L'axiome III,5 énoncé, Hilbert peut alors énoncer et démontrer le second cas d'égalité des triangles qu'il appelle premier cas de congruence.

Hilbert démontre d'abord l'unicité du report d'un segment donné sur une demi-droite d'origine donnée (cf. ci-dessus).

Notons d'abord que deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont dits *congruents* si les côtés correspondants et les angles correspondants sont congruents. On peut alors énoncer le théorème suivant (théorème 12):

"Si entre deux triangles ABC et A'B'C', sont satisfaites les congruences

$$AB \equiv A'B' \qquad AC \equiv A'C' \qquad \angle BAC \equiv \angle B'A'C'$$

ces deux triangles sont congruents."[24]

L'axiome III,5 implique les congruences

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C' \qquad \angle ACB \equiv \angle A'C'B'$$

Reste à démontrer la congruence $BC \equiv B'C'$. Sur la demi-droite d'origine B' et portant le segment B'C', il existe un point D' et un seul tel que BC ≡ B'D'; l'axiome III,5 appliqué aux deux triangles ABC et A'B'D' implique la congruence

$$\angle BAC \equiv \angle B'A'D'$$

[22]La notion de côté d'une droite dans un plan est assurée par les axiomes d'ordre antérieurement énoncée.
[23]David Hilbert, o.c. p. 22
[24]David Hilbert, o.c. p. 25

Ainsi l'angle *B'A'D'*, congruent à l'angle *BAC* est congruent à l'angle *B'A'C'* ce qui contredit l'unicité du report des angles. Il s'ensuit que les points *C'* et *D'* coïncident et que les triangles *ABC* et *A'B'C'* sont congruents.

Nous ne reviendrons pas sur les autres cas d'égalité des triangles (théorème 12 et théorème 18) qui s'appuient sur l'axiome III,5 et le théorème 12.

Une comparaison entre les énoncés hilbertiens et euclidiens nous montre une proximité sémantique si l'on considère que les termes hilbertiens, même s'ils sont *a priori* sans signification, renvoient à la connaissance intuitive. C'est ce qu'explique Hilbert à propos des axiomes et de leur regroupement lorsqu'il écrit au début de l'ouvrage *"chacun de ces groupes exprime quelque faits fondamentaux, liés les uns aux autres et qui nous sont donnés par l'intuition"*[25]. La construction formelle n'est donc pas arbitraire et renvoie à des significations qui lui sont antérieures; en ce sens on peut parler chez Hilbert d'une conception dualiste de la connaissance comme il l'explique au début de la préface de *Geometry and Imagination* (cf. ci-dessus)[26].

La distinction se situe alors dans la constitution du discours démonstratif. Si le discours euclidien s'appuie sur les objets en tant que tels, ce qui implique qu'il suppose d'une part leur existence, d'autre part une connaissance intuitive de ces objets (que ces objets participent des Idées platoniciennes ou relèvent de la connaissance empirique importe peu ici), le discours hilbertien recherche, pour des raisons de légitimation interne au discours, une autonomie par rapport à toute signification extérieure, pour reprendre une expression de Gonseth: les objets ne sont que des mots (les termes primitifs de la théorie) reliés par des assertions (les axiomes) énoncées *a priori*.

Si dans le cadre de la géométrie euclidienne la figure, en tant qu'elle représente les objets sur lesquels porte le raisonnement euclidien (sans que nous nous prononcions ici sur la nature de ces objets), joue un rôle essentiel, elle n'a plus de place dans le raisonnement hilbertien qui porte uniquement sur les mots et la manière d'en user (la syntaxe)[27].

Du mouvement au déplacement considéré comme correspondance entre figures

La relation d'égalité entre figures, qu'elle soit sous la forme euclidienne ou sous la forme hilbertienne, définit une relation d'équivalence entre figures. Deux figures égales étant données, on peut considérer la correspondance qui associe à tout élément de la première figure un élément correspondant de la seconde figure; il est clair que cette correspondance conserve les angles et les longueurs.

La correspondance ainsi définie ne dépend pas du mouvement qui a amené la première figure sur la seconde; c'est cette indépendance qui a conduit Raoul Bricard à distinguer entre cette correspondance, qu'il appelle *déplacement*, et le mouvement qui envoie la première figure sur la seconde, ce qu'il énonce de la façon suivante:

"On appelle déplacement toute opération qui fait passer un corps d'une position à une autre. Un déplacement résulte toujours, dans la pratique, d'un mouvement au cours duquel le corps occupe une série continue de positions, depuis la position initiale jusqu'à la position finale… Un déplacement donné peut être réalisé par une infinité de

[25] David Hilbert, o.c. p. 11

[26] Nous développons ce point dans notre article cité "La démonstration: du réalisme au formalisme", o.c.

[27] Nous pouvons cependant noter que le grand nombre de figures qui accompagnent l'exposé hilbertien nous rappelle combien cet exposé se veut proche de la connaissance intuitive; si les figures n'interviennent pas en tant que telles dans le discours, elles restent cependant un guide dans l'élaboration de ce discours.

mouvements différents entre eux, soit par leurs définitions géométriques, soit par leurs lois du temps."[28]

On voit ainsi comment se distingue le mouvement et l'opération définie par la correspondance, ce que l'on appelle aujourd'hui une transformation. Nous reviendrons ultérieurement sur cette distinction.

La relation d'égalité entre deux figures peut s'étendre à des figures plus grandes voire au plan ou à l'espace. Pour comprendre comment se joue cette extension nous rappellerons cet énoncé de Chasles:

"Quand on a une figure plane, si on la déplace d'une manière quelconque dans son plan, il y aura toujours dans cette figure un point qui, après le déplacement se retrouvera au même lieu."[29]

Chasles met ainsi l'accent sur le fait que le mouvement d'une figure plane dans son plan implique un mouvement du plan sur lui-même et que l'on peut toujours considérer que la correspondance entre les deux positions peut être définie par un mouvement de rotation autour du point qui se correspond à lui-même. Notons que Chasles néglige le cas où la correspondance est définie par une translation mais l'on peut considérer que ce dernier cas est évident et n'a pas besoin de démonstration.

Plus tard ce même énoncé sera repris sous la forme suivante:

"Tout déplacement d'une figure plane, de forme invariable, dans son plan peut être produit par une rotation ou une translation."[30]

Cet énoncé nous dit que, dans un mouvement plan, on peut toujours passer de la position initiale d'une figure plane à sa position finale par un mouvement de translation ou de rotation. Le terme déplacement a ainsi un sens ambigu dans la mesure ou il se rapporte à la fois au mouvement et à la correspondance entre les positions initiales et finales.

Aujourd'hui nous énoncerions que, deux figures directement égales étant données dans un plan, il existe un déplacement (au sens transformationnel du terme) et un seul qui envoie la première figure sur la seconde, ce qui suppose la notion de déplacement mise en place. Une telle notion implique une double abstraction, l'oubli du mouvement d'une part et le prolongement de la correspondance entre les figures au plan; cette double abstraction et l'ambiguïté signalée ci-dessus montrent la difficulté que représente le passage du mouvement à la notion transformationnelle de déplacement, difficulté sur laquelle nous reviendrons dans la dernière partie de cet article. C'est cette double abstraction qui permet de comprendre l'importance de la notion d'isométrie dans le développement de la géométrie élémentaire. Notons que cette double abstraction est issue de la mise en relation entre l'étude du mouvement et la notion de transformation telle que l'a développée la géométrie projective. Il fallait penser la correspondance entre deux figures égales comme une correspondance

[28]Raoul Bricard, *Cinématique et mécanismes*, Armand Colin, Paris 1947, p. 1

[29]Michel Chasles, *Mémoire de Géométrie sur la composante des normales à plusieurs courbes mécaniques*, Bulletin de la Société Mathématique de France, volume 6, 1878, p. 208-251. Cet article reproduit un exposé fait par Chasles en 1830 à la Société Philomatique.

[30]Ch. Vacquant et A. Macé de Lépinay, *Cours de Géométrie* (à l'usage des élèves de Mathématiques Elémentaires), cinquième édition, Masson, Paris 1896, p. 134

projective particulière pour penser les déplacements comme des transformations particulières[31].

Isométries et cas d'égalité des triangles

Une *isométrie* d'un plan sur un autre est une application qui conserve les longueurs. Notons que le terme "longueur" n'implique aucune notion de mesure. La longueur d'un segment est sa classe d'équivalence pour la relation d'égalité si l'on se situe dans le corpus euclidien (deux segments sont égaux si et seulement ils sont superposables), pour la relation de congruence si l'on se place dans le corpus hilbertien. Le terme isométrie est donc impropre dans la mesure où il renvoie à une notion de mesure *via* la distance définie comme application à valeurs dans l'ensemble des nombres réels positifs satisfaisant aux conditions que l'on sait. Il vaudrait mieux employer le terme *"isolonguie"*, mais pour respecter l'usage courant nous emploierons le terme isométrie, une fois précisée sa définition.

L'inégalité triangulaire implique qu'une isométrie conserve l'alignement et l'ordre des points sur une droite et l'on montre aisément que, deux points A et B étant donnés, A' et B' leurs images par une isométrie, cette isométrie induit une bijection de l'ensemble des points de la droite (AB) sur l'ensemble des points de la droite ($A'B'$). On en déduit qu'une isométrie d'un plan dans un autre est une bijection de l'ensemble des points du premier dans l'ensemble des points du second.

Le troisième cas d'égalité des triangles implique qu'une isométrie conserve les angles.

On peut alors montrer que deux triangles ABC et $A'B'C'$ égaux étant donnés, il existe une isométrie et une seule du plan du premier triangle dans le plan du second triangle qui envoie les points A, B, C respectivement sur les points A', B', C. En particulier deux triangles égaux étant donnés dans un plan, il existe une isométrie et une seule appliquant le premier plan sur le second.

Si l'on se place dans le cadre du *Programme d'Erlangen*, la géométrie élémentaire plane étant définie par l'action du groupe des isométries sur le plan, l'ensemble des triangles égal à un triangle donné définit ce que Klein appelle un *corps*, c'est-à-dire l'ensemble des figures obtenues à partir d'une figure donnée par l'action du groupe[32]; en outre le groupe des isométries opère simplement transitivement sur le corps défini par un triangle[33].

Isométries et mouvement

La notion d'isométrie définie ci-dessus est indépendante du mouvement. Si l'on veut relier isométrie et mouvement, on peut remarquer que deux triangles égaux étant donnés, les cas d'égalité des triangles assurent qu'il existe un mouvement envoyant le premier sur le second, ce mouvement n'étant pas unique comme l'explique Bricard dans le texte cité ci-dessus. On peut alors considérer la notion d'isométrie comme une "statification" du mouvement, c'est cette statification qui permet de considérer la "transformation" isométrie comme une correspondance entre figures. En ce sens le

[31]Michel Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Bruxelles 1837, réédition Jacques Gabay, Paris 1989, p. 549-550

[32]Felix Klein, *Le Programme d'Erlangen* (1872), (traduction Padé), Gauthier-Villars, Paris 1874, p. 17-18. Intuitivement on peut considérer un corps comme l'ensemble des *positions* d'une figure sous l'action du groupe définissant la géométrie.

[33]On dit qu'un groupe **G** opère *simplement transitivement* sur un ensemble **E**, si, deux éléments x et y de **E** étant donnés, il existe un élément g du groupe et un seul tel que $g(x) = y$.

point de vue des transformations est essentiellement statique et c'est ici l'une des difficultés que de comprendre la correspondance issue d'un mouvement comme une notion statique; nous reviendrons sur cette question dans la dernière partie de cet article.

On peut préciser cette distinction entre mouvement et isométrie en notant que, un plan étant donné, si l'on considère les seules isométries provenant d'un mouvement plan sur plan, ces isométries conservent l'orientation du plan. Le groupe opérant sur le plan est alors le groupe des isométries directes du plan; le corps défini par un triangle est alors l'ensemble des triangles directement égaux au triangle donné.

Quelques questions didactiques[34]

Le premier enseignement de la géométrie élémentaire relève à la fois des mathématiques et de la physique, c'est-à-dire qu'il doit s'appuyer sur la connaissance empirique en même temps qu'il doit amener ceux qui le reçoivent à comprendre comment le raisonnement permet à la fois de connaître de nouvelles vérités et de les organiser de façon cohérente. C'est dans ce cadre que les cas d'égalité ont leur place.

En ce sens l'enseignement de la géométrie doit prendre en compte à la fois le mouvement et son élimination. Si la démonstration du premier cas d'égalité des triangles prend en compte le mouvement et relève de l'expérience mentale, elle permet en contrepoint d'éliminer le mouvement, en particulier de montrer les deux autres cas d'égalité par le seul raisonnement.

Ainsi peut être précisé le lien entre mouvement et corps solide, les notions de même forme et même grandeur apparaissant comme des invariants du mouvement.

Reste alors la difficile question des liens entre mouvement et transformations, d'autant plus difficile que le mouvement d'un corps solide ne le transforme pas. Nous avons ci-dessus cité Bricard qui distingue entre le mouvement et le déplacement; on peut alors considérer cette distinction comme l'un des objectifs de l'enseignement de la géométrie élémentaire. Mais pour que cette distinction prenne sens, il semble nécessaire que les élèves aient rencontré de véritables transformations, c'est-à-dire des transformations qui transforment effectivement forme et grandeur, ainsi la perspective ou l'inversion, qu'ils aient vu aussi comment les isométries peuvent être considérés comme des cas particuliers de ces transformations.

Nous terminerons cet article en rappelant la polémique entre Charles Méray et les réformateurs de 1902 qui s'appuyaient sur les idées défendues par Méray quelques trente ans auparavant. Si Méray proposait dans ses *Nouveaux Eléments de Géométrie*[35] de prendre en compte le mouvement dans l'enseignement de la géométrie élémentaire, les réformateurs de 1902, se référant au *Programme d'Erlangen*, voyaient dans cette prise en compte une première approche du rôle des groupes de transformations dans l'élaboration de la géométrie. Dans un article publié en 1907[36], Méray critiquait *"les tentatives d'adaptation pédagogique de mes théories"* refusant en particulier la référence aux *"groupes de transformations ou de déplacements"*. Si l'on peut voir dans la réaction de Charles Méray l'amertume de qui voit la prise en compte d'idées qu'il

---

[34]Nous utilisons ici le terme didactique comme adjectif renvoyant à l'acte d'enseigner. Ce terme pris dans son sens premier est étranger à toute idée d'une "didactique" comme science. Nous avons expliqué par ailleurs les limites d'une didactique scientifique ("De la transposition didactique" in *Didactatiques* n°4, IREM de Lorraine, 1999).

[35]Charles Méray, *Nouveaux Eléments de Géométrie*, Savy, Paris 1874; nouvelle édition, Jobard, Dijon 1903

[36]Charles Méray, "Mes « Nouveaux Eléments de Géométrie »", *Revue Scientifique* (revue rose), 5ème série, tome VIII, 1907, p. 231-237

avait émise en vain quelques trente ans auparavant[37], il faut aussi regarder de plus près la question que pose l'article cité de Méray, celle du lien entre la notion de mouvement et la notion de transformation. En fait ce lien, qui peut sembler "aller de soi" pour qui connaît les mathématiques d'aujourd'hui, s'est construit au XIXème siècle lorsque l'on a explicité le lien entre cinématique et géométrie projective et que l'on a reconnu dans les isométries et les similitudes des transformations projectives particulières[38]. L'explicitation de ce lien supposait d'une part ce que nous avons appelé la statification du mouvement, d'autre part une ré-écriture de la cinématique du solide comme application d'un intervalle de temps dans le groupe des isométries directes du plan ou de l'espace; une telle explicitation demandait à la fois de prendre en compte et de lever les ambiguïtés liées à la considération simultanée du mouvement et de la correspondance entre l'état initial et l'état final.

Peut-on alors considérer que, le travail étant fait par les mathématiciens et les mécaniciens, les résultats peuvent être livrés tels quels dans l'enseignement. C'est supposer que la modernité est transparente et qu'il suffit de la raconter aux élèves pour qu'elle soit comprise. La réforme *des mathématiques modernes* nous a appris que la modernité était loin d'être transparente et que le rôle de l'enseignement est moins de la raconter que de la rendre accessible, c'est-à-dire de construire les chemins qui permettront aux élèves de l'appréhender.

En ce qui concerne l'enseignement de la géométrie élémentaire, il me semble plus important, m'appuyant sur les conceptions de ceux qui ont conduit à la réforme de 1902, de prendre en compte le mouvement dans l'enseignement de la géométrie élémentaire et de montrer comment les cas d'égalité des triangles, en tant qu'ils sont des critères rationnels de superposabilité, permettent d'éliminer le mouvement de la géométrie. En ce sens les cas d'égalité gardent leur force dans la construction de la rationalité géométrique. Reste alors à construire la notion transformationnelle d'isométrie et préciser la distinction entre mouvement et déplacement au sens que dit Bricard. Ces remarques n'impliquent en rien qu'il faille éviter le point de vue des transformations dans l'enseignement de la géoémtrie élémentaire, elles précisent seulement que la distinction entre mouvement et déplacement est à construire et que dans un premier temps il n'est pas nécessaire de les distinguer. Une distinction trop précoce ne peut que conduire à ces discussions inutiles telles que les racontent par exemple Jean-Luc Gasser[39], discussions inutiles dans la mesure où elles s'appuient moins sur des questions scientifiques que sur les formulations proposées par des programmes incapables de prendre en charge les relations entre sciences mathématiques et sciences physiques.

---

[37]Emile Borel répondra qu'il ne comprend pas les critiques de Méray envers ceux qui s'appuient sur ses idées mais il ne semble pas avoir vu la question posée par Méray du lien entre mouvement et transformation (Emile Borel, "A propos de l'enseignement de la géométrie élémentaire", in *Œuvres*, Editions du CNRS, Paris 1972, p. 2257-2262)

[38]Nous renvoyons aux textes de Chasles cités.

[39]Jean-Luc Gasser, "Mathématiques et sciences physiques: translations et rotations", *Repères-IREM*, n°25, octobre 1996

Annexe 1

Nous présentons ici un texte de Jules Hoüel sur l'importance du mouvement dans la construction de la géométrie élémentaire.

"C'est par suite d'une confusion d'idées que plusieurs géomètres veulent bannir des éléments de géométrie la considération du mouvement.

L'idée du mouvement, abstraction faite du temps employé à l'accomplir, c'est-à-dire l'idée du mouvement géométrique, n'est pas une idée plus complexe que celle de grandeur ou d'étendue. On peut même dire, en toute rigueur, que cette idée est identique avec celle de grandeur, puisque c'est précisément par le mouvement que nous parvenons à l'idée de grandeur.

Ce mouvement géométrique, qu'une équivoque de langage a fait confondre avec le mouvement dans le temps, objet de la cinématique, ne peut pas dépendre d'une autre science que la géométrie pure.

Il est avantageux d'introduire cette idée de mouvement géométrique le plus tôt et le plus explicitement possible. On y gagne beaucoup sous le rapport de la clarté et de la précision du langage, et l'on se trouve mieux préparé à introduire plus tard dans le mouvement les notions de temps et de vitesse.

C'est d'ailleurs ce que tous les auteurs font à leur insu; et il serait difficile de trouver une seule démonstration d'une proposition fondamentale de la géométrie, dans laquelle n'entre pas l'idée de mouvement géométrique, plus ou moins déguisée."[40]

Le texte de Hoüel s'inscrit dans le mouvement d'idées qui a conduit à la réforme de 1902 et il nous semble qu'il garde toute son actualité si l'on veut prendre en compte dans l'enseignement le caractère mixte de la géométrie, mixte au sens des *mathématiques mixtes* des XVIIème et XVIIIème siècle dont D'Alembert disait qu'elles ont pour objet *"les propriétés de la grandeur concrète, en tant qu'elle est mesurable ou calculable"*[41].

---

[40]Jules Hoüel, *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire*, Gauthier-Villars, Paris 1867, p. 59-60

[41]D'Alembert, rubrique "mathématiques" in *Encyclopédie Méthodique: Mathématiques* (trois tomes), Paris-Liège 1785, réédition ACL- Paris 1987; tome second, p. 366

Annexe 2

Le texte de Hoüel s'appuie sur une notion de mouvement indépendante du temps, laquelle participe ce que l'on appellera la *géométrie cinématique* que Mannheim définit ainsi:

"La Cinématique a pour objet l'étude du mouvement indépendamment des forces; la Géométrie cinématique a pour objet l'étude du mouvement indépendamment des forces et du temps, c'est-à-dire qu'elle a pour objet l'étude des déplacements. Nous réservons l'expression de déplacement pour un mouvement dans lequel on ne considère pas la vitesse."[42]

On peut alors considérer ce "mouvement sans le temps" comme principe fondateur de la géométrie élémentaire, l'égalité (ou la congruence) de deux corps étant définie par la possibilité d'amener l'un sur l'autre. On peut alors préciser la relation d'égalité en énonçant les deux axiomes ci-dessous. Nous reprenons ici la terminologie de Bricard quant à la distinction entre mouvement et déplacement.

La premier axiome peut s'énoncer ainsi:

Axiome 1: *Soit Ox et o'x' deux demi-droites, il existe un mouvement qui amène la demi-droite Ox sur la demi-droite O'x'. Deux mouvements qui amènent la demi-droite Ox sur la demi-droite O'x' définissent le même déplacement.*

Pour énoncer le second axiome, nous introduirons la notion de drapeau: un *drapeau* est la figure formée par la donnée d'une demi-droite *Ox* et d'un demi-plan Ω bordé par la droite support de la demi-droite *Ox*; on peut alors énoncer:

Axiome 2: *Soient deux drapeaux* (*Ox*,Ω) *et* (*O'x'*,Ω'), *il existe un mouvement qui amène la demi-droite Ox sur la demi-droite O'x' et le demi-plan* Ω *sur le demi-plan* Ω'. *Deux mouvements amenant le drapeau* (*Ox*,Ω) *sur le drapeau* (*Ox'*,Ω') *définissent le même déplacement.*

Les axiomes 1 et 2 une fois énoncés, on montre aisément les propriétés de report de segments et d'angles (existence et unicité) ainsi que le premier cas d'égalité des triangles. Nous renvoyons à une publication ultérieure pour un exposé de la géométrie élémentaire à partir des deux axiomes précédents.

---

[42]Amédée Mannheim, *Cours de Géométrie descriptive de l'Ecole Polytechnique*, Gauthier-Villars, Paris 1880, treizième leçon