Note technique 02 pour la Commission Torossian/Villani

http://micheldelord.info/nt02.pdf

CQFD

ou

Comprendre les Questions Fondamentales Disciplinaires.

Débat possible sur Images des Maths, Débat du 18

http://images.math.cnrs.fr/CQFD-Comprendre-les-Questions-Fondamentales-Disciplinaires.html

Images des maths m'a demandé il y a une dizaine de jours d'écrire un petit texte pour lancer la discussion sur la page « Débat du 18 » et j'ai pensé qu'une contribution traitant du rôle de la *Mission Maths Torossian/Villani* serait d'actualité.
Mais comme le texte que j'avais fait était un peu trop long pour pouvoir lancer un débat, il y a deux textes qui portent tous deux le titre « ***CQFD*** : ***C****omprendre les* ***Q****uestions* ***F****ondamentales* ***D****isciplinaires* »:
- le texte court qui est sur *Image des Maths* à l'adresse
http://images.math.cnrs.fr/CQFD-Comprendre-les-Questions-Fondamentales-Disciplinaires.html
- le texte long est présenté à partir de la page de mon blog SLECC-CQFD http://micheldelord.blogspot.fr

Le texte court, celui qui est sur le site *Image des maths*, se finit par le passage *infra* destiné à lancer le débat.

17/11/2017
Michel Delord

L'histoire tourmentée de l'enseignement des mathématiques en France semble plutôt conforter une vision pessimiste. Pour toute les raisons que l'on vient d'évoquer et bien d'autres, la tâche qui incombe à M. Villani et M. Torossian, responsables de la Mission Maths proposée par le ministre de l'Éducation, semble immense puisqu'elle consiste en rien moins que proposer des orientations qui « donnent aux jeunes le goût des mathématiques » … *en trois mois* ! Si l'état de l'école est extrêmement grave, on ne va pas « refonder l'école en trois mois » et, pour reprendre le début de cette lettre il faut éviter avant tout le grand écart que je dénonçais plus haut, y compris dans le rôle que s'assigne cette mission.

Il est manifeste – et c'est logique si la dégradation est ancienne – que
- les résistances sont telles que la mission n'arrivera pas à convaincre de la nécessité d'une rupture suffisante dans un délai imparti aussi court
- dans le cas où cette mission avancerait des mesures jugées « trop indépendantes par rapport à l'appareil », celui-ci, qui a déjà l'aptitude naturelle à changer l'or en plomb, montrerait ses capacités paralysantes.

Dans la mesure où il s'agit d'une question de temps, – *le temps de convaincre* – une solution ne serait-telle pas que la mission pousse au plus loin son désir de rupture dans les délais prévus mais qu'elle ne s'arrête pas là. Elle pourrait ainsi recommander dans son rapport final de prendre diverses initiatives qui permettraient d'assurer la continuité de ce qu'elle a commencé à faire : ce peut être, sans que ces propositions s'excluent, la création d'un comité de suivi et / ou de propositions dont l'indépendance doit être garantie au maximum, l'organisation de colloques régionaux, espacés mais réguliers permettant une consultation beaucoup plus large que l'actuelle…

Qu'en pensez-vous ?

I - Si l'école primaire doit instruire…

Si l'on suppose que *l'école primaire* doit instruire, une « refondation », indépendamment des termes exacts employés, est depuis longtemps fondamentalement nécessaire[1]. Il est certes *étrange* que les partisans officiels de cette refondation soient globalement ceux qui affirmaient encore récemment « *Le niveau monte* » et encore plus étrange que, plus ils admettent l'importance de la baisse de niveau, plus ils proposent des objectifs mirifiques et hors de portée.

*Evitons ce grand écart pour recommander un objectif immédiat, beaucoup plus modeste au moins en apparence : repérer les erreurs fondamentales qui ont pu être commises dans le passé pour éviter qu'elles ne se reproduisent. Il faut, avant tout, Comprendre les **Q**uestions **F**ondamentales **D**isciplinaires.*

*Les **Q**uestions **F**ondamentales **D**isciplinaires ?*

Ce qui est *fondamental* dans l'instruction est :

i) en terme de niveau, l'enseignement primaire et en particulier ses débuts, fondamentaux par essence ;

ii) en terme de disciplines, « *une forme adaptée d'arithmétique au sens ancien* » et « *l'écriture-lecture de la langue au sens large et au sens étroit* »[2]. Ce sont les bases de la culture générale, scientifique et humaniste ; et inversement, *Savoir Lire Ecrire Compter Calculer*[i] *–SLECC– exige une bonne connaissance des mots et du monde*[ii].

iii) l'ensemble des idées qui ont une certaine permanence qui porte à leur enracinement ; on va donc s'intéresser en particulier à celles qui traduisent une grande continuité négative, puisque l'on analyse, pour les combattre, les faiblesses d'un système très dégradé : les exemples les plus typiques sont les positions positives invariantes de 1880 à 1970, qui s'inversent à ce moment-là et persistent sous cette nouvelle forme de 1970 à nos jours.

Quel passé étudier ? Historiquement on peut s'accorder sur le fait que la première grande rupture – positive – dans l'histoire de l'école primaire est *la rénovation pédagogique effectuée pendant les années 1880,* au nom de la *méthode intuitive sous la direction de Ferdinand Buisson et James Guillaume* . Depuis cette époque la principale rupture – reconnue en tant que telle autant par ses partisans que ses opposants — se situe en 1960/70 au moment de la réforme des maths modernes en primaire.

II) Deux thèses des maths modernes

La réforme des maths modernes se présente, dans la charte de Chambéry de l'APMEP[iii] (janvier 1968), comme la « *conception constructive, axiomatique, structurelle des mathématiques [s'appliquant] de la maternelle aux facultés* ». Elle justifie l'existence d'une chimère absolue : *La conception axiomatique, structurelle des mathématiques [s'appliquant à] la maternelle* !! Et à lire cet énoncé recommandant l'axiomatique en primaire – et c'est ce qui a été fait–, on peut se douter qu'il va y avoir conflit avec la *méthode intuitive* précédemment recommandée. Mais la réforme des « maths modernes ou pures » justifie aussi des thèses d'autant plus influentes qu'elles sont peu souvent évoquées. Ces thèses apparues au moment de la réforme de 70 en provoquant des effets ravageurs ont perduré dans leurs grandes lignes jusqu'à nos jours. En voici deux, fondamentales :

---

[1] Que cette refondation soit possible ou non est une autre question. Le mathématicien russe Alexeï Sossinski qui s'est beaucoup intéressé à l'enseignement me semble développer de bons arguments lorsqu'il dit ne pense pas qu'une réforme – positive – soit possible*. De toutes les façons plus on attend pour prendre des mesures efficaces moins on a de chances, si c'est encore possible, de réussir et plus les mesures à proposer devront être drastiques.
* Alexei Sossinski, *Mathématiques appliquées à l'école ? Ah, non !* , revue Commentaire, été 2012.
http://ecolereferences.blogspot.fr/2012/08/mathematiques-appliquees-lecole-ah-non.html

[2] J'emploie des termes volontairement imprécis car une partie du travail sera justement de les préciser. J'entends par « *forme d'arithmétique au sens ancien* » le fait de « *penser le cours d'arithmétique non comme un cours de mathématiques mais comme un ensemble organisé de connaissances liant le calcul, la géométrie et la physiques* », ce qui est une autre manière de dire ce que je propose dans l'article « *Singapore math ou Singapore Math Inc.* ». J'entends par « *l'écriture-lecture de la langue au sens large et au sens étroit* » le fait d'ajouter à l'enseignement de l'écriture-lecture au sens strict celui des débuts de l'orthographe et de la grammaire.

Thèse 1 : Structures mère de Bourbaki / Structures cognitives selon Piaget

Il y a une forte similitude (qui peut aller jusqu'à une quasi identité) « entre les structures mères de Bourbaki et les structures cognitives que Piaget voulait définir dans le cadre de l'épistémologie génétique ; c'est sur cette confusion que s'est construite en partie l'idéologie de la réforme. »[3]. La psychologie piagétienne ne pouvait donc qu'avoir raison puisqu'elle s'appuyait sur la science noble par excellence, « la mathématique[4] », tandis que « la mathématique », lorsqu'elle travaillait sur les structures algébriques et topologiques, pouvait donner l'illusion qu'elle visitait les tréfonds de la psychologie humaine, ce qui donnait aux deux corporations le sentiment de pouvoir ainsi renforcer leur prestige social.

Thèse 2 : Fondement des mathématiques et début de l'enseignement des mathématiques

Il y a une forte similitude entre le contenu des débuts de l'enseignement des mathématiques, c'est-à-dire en primaire, et les fondements théoriques et logiques des mathématiques. En conséquence le contenu à enseigner en GS-CP devait donc être une adaptation pour cette classe de connaissances de niveau universitaire (les ensembles, les relations, la notion de nombre entier conçue exclusivement à partir de la notion de successeur comme dans les axiomatique telles que celle de Peano etc.).

III) La transposition didactique (ou didactisation)

À partir de 1972 se développe une critique de la réforme des maths modernes qui va être la principale matrice de la *nouvelle didactique*[5] des mathématiques : elle s'avère être une pseudo-critique qui signe le passage d'une présentation ultra-formaliste à une conception activiste[iv] de l'enseignement. Comme il ne s'agit que d'une critique partielle, de nombreuses erreurs caractéristiques de la période des maths modernes persistent et, par exemple, il n'y pas de critique explicite de la démarche, pourtant fondamentale, des maths modernes décrite dans les thèses 1 et 2, de plus base de la conception des programmes de 70.

Cette démarche se perpétue donc dans ses grandes lignes et, sa non-critique devenant ainsi une justification de la période précédente, elle est simultanément systématisée notamment à l'aide du concept de « transposition didactique » qui affirme que le contenu de l'enseignement à un niveau donné doit être conçu comme la transposition pour ce niveau du contenu d'un enseignement donné à un niveau supérieur. C'est donc exactement la démarche des maths modernes lorsque, par exemple, elles s'inspiraient d'une conception axiomatique de la notion d'entier pour construire une progression permettant d'enseigner la numération et le calcul en CP.

La transposition didactique est considérée officiellement et à juste titre comme la partie principale de la didactique des mathématiques et si la transposition didactique est la didactisation, c'est bien que cette transposition est la colonne vertébrale de la didactique. La transposition didactique est bien la généralisation à tous les sujets d'étude et à tous les niveaux des erreurs fondamentales des maths modernes.

Elle est honorée mondialement en tant que telle puisque son concepteur central Yves Chevallard est lauréat en 2009 du Prix Hans Freudenthal, une des plus importantes distinctions décernées par la plus haute autorité mondiale en ce domaine, la Commission internationale de l'enseignement mathématique.

---

[3] « *De la rencontre entre Piaget et Dieudonné (du groupe de mathématiciens Bourbaki) est née la confusion entre les structures-mères de Bourbaki et les structures cognitives que Piaget voulait définir dans le cadre de l'épistémologie génétique ; c'est sur cette confusion que s'est construite en partie l'idéologie de la réforme.* »
Rudolf Bkouche, *Interview pour le SNES*, 2002, http://www.snes.edu/observ/documents/maths_bkouche.pdf

[4] Je n'ai rien contre cette appellation des mathématiques proposée notamment par Auguste Comte qui sous-entend que les mathématiques sont un ensemble organisé (et pas « d'un tas », comme le disait Lebesgue) et je suis même franchement favorable à son utilisation lorsqu'elle se fait dans le cadre de ce que disait Charles-Ange Laisant, c'est-à-dire considérer les mathématiques sont une science expérimentale. Je ne sais si une telle conception théorique correspond à la structure des mathématiques et aux préoccupations des mathématiciens d'aujourd'hui mais elle me semble tout à fait correspondre à ce que devrait être l'enseignement mathématique jusqu'à la fin du lycée.

[5] « *Nouvelle didactique* » car il y a toujours eu une didactique des mathématiques. Dit très succinctement et avec toutes les possibilités d'incompréhensions que comporte cette formulation, je vise celle qui, en France, a comme porte-paroles principaux Yves Chevallard, Michèle Artigue, Gérard Vergnaud et Guy Brousseau. Je place Yves Chevallard en tête car c'est lui qui a théorisé l'outil majeur de la *nouvelle didactique*, je veux dire la transposition didactique.

Cette situation est problématique et de nombreux universitaires pas seulement mathématiciens le reconnaissent en off. Il serait peut-être temps de ne plus pousser la poussière sous le tapis.

IV) Principe de distance

L'effet négatif de cette transposition est d'autant plus important qu'est grande la distance entre le contenu de la notion savante et celui de la notion transposée pour un niveau inférieur. Ainsi l'on est sûr que proposer l'enseignement de l'axiomatique de Peano à l'université est on ne peut plus justifié puisque l'on peut enseigner la notion et non une transposition de celle-ci : normalement à ce niveau l'élève a une connaissance suffisante des mathématiques et de l'abstraction pour que le maniement de quelques bases de l'axiomatique puisse lui paraître *intuitive* sans trop de difficultés. Par contre le niveau où la réforme a, selon ce principe, les pires effets, est celui pour lequel la distance évoquée plus haut est la plus grande, c'est-à-dire dans le cas où l'on transpose des connaissances de niveau universitaire vers l'enseignement primaire et en particulier le début de celui-ci. *Or c'est pour ce niveau scolaire, là où elles sont le plus néfastes,*

- que les doctrines des partisans des maths modernes et celles de leurs continuateurs (qui reprennent en partie la problématique précédente et donnent naissance à la nouvelle didactique des mathématiques), sont quasiment hégémoniques.

- que la critique de l'idéologie des maths modernes est la plus faible, une des raisons étant qu'il faut comprendre ce qu'est le « savoir savant » pour concevoir qu'on ne peut pas le transposer.

En ce sens, <u>à *l'époque* – donc bien ancienne– *où les maths modernes n'avaient pas encore envahi tous les niveaux d'enseignement et de formation*</u>, ***il était dans l'absolu inadéquat d'être pour ou contre les maths modernes :***

- on ne pouvait qu'y être favorable dans l'enseignement supérieur, en les considérant au minimum comme une conception des mathématiques – l'intuitionnisme à la Brouwer en étant par exemple une autre –

- on ne pouvait qu'y être absolument opposé pour l'enseignement primaire.

Mais cette position, que j'ai tenté de défendre en son temps, était très difficile à tenir car les deux camps avaient des attitudes extrêmement sectaires et chacun considérait comme un ennemi ou un traître celui qui n'optait pas pour « *les maths modernes partout* » ou « *les maths modernes nulle part* ».

L'on a une deuxième raison de croire à ce «principe de distance» puisque l'on peut constater, sur un certain nombre d'exemples pris des années 60 à 75, qu'il y a eu une « bonne » compréhension de l'algèbre linéaire au lycée pour les élèves qui avaient eu une formation antérieure en géométrie euclidienne classique.

Il est d'ailleurs tout à fait logique que – les « maths modernes » [resp. ***ne***] ***puissent être abordées*** [resp. ***qu'***] ***à partir d'une perspective « classique » puisqu'elles ont été découvertes à partir d'une telle perspective et pour en résoudre les limitations ou les paradoxes***.

V) Deux exemples de Questions Fondamentales Disciplinaires

Pour avoir une première approche du sens et du contenu de l'expression *Question Fondamentale Disciplinaire,* le mieux de s'intéresser à l'une d'elles *Comptage et calcul /Nombres purs et nombres concrets*. La question est très vaste et l'on se contentera ici d'aperçus sur les sujets suivants :

1) *Quelques différences entre le calcul sur les nombres purs et le calcul sur les nombres concrets*
2) *Le comptage est-il l'ABC du calcul ?*
3) *Petites remarques sur les 4 opérations en CP*

1) Quelques différences entre le calcul sur les nombres purs et le calcul sur les nombres concrets

a) Avant 1970 :

On fait la différence entre ***nombre concret*** et ***nombre pur*** en se basant sur les définitions suivantes :t
Nombre concret : nombre suivi du nom de son unité. Exemples : 3 kg ; 2 poules ; ¼ litre ; 0,2 kg, √3 m.
Nombre pur (ou *abstrait*) : nombre qui n'est pas suivi du nom de son unité : 3 ; 2 ; ¼ ; 0,2 ; √3.

Il y a donc deux types différents de numération / comptage
- le comptage avec les nombres purs : 1; 2; 3; 4…
- le comptage avec les nombres concrets : 1gâteau; 2 gâteaux; 3 gâteaux; 4 gâteaux …qui suppose donc la prise en compte <u>explicite</u> de l'unité.

On ne s'étendra pas sur les différences entre les deux types de comptage (on en trouvera cependant un exemple dans le chapitre suivant) et on passe tout de suite aux deux types de calcul, celui sur les nombres purs et celui sur les nombres concrets.

a) Si l'on se limite aux nombres purs, on peut effectuer n'importe quelle opération à partir de deux nombres, sauf la division par zéro[6].
b) Si l'on passe au nombre concret « 3 m » qui contient plus de données que le nombre pur 3, on peut subodorer que ce surplus d'informations va limiter les possibilités d'opérations effectuables sur un couple quelconque de nombres concrets. Le calcul sur les nombres concrets est donc en ce sens plus régulé – c'est-à-dire soumis à plus de règles, limitatives par essence – que le calcul sur les nombres purs. Mais ce sont ces limitations qui font sa richesse et le fait que « *l'on ne puisse pas* ***<u>écrire</u>*** *3 dm + 4 kg* » en est un exemple (mais je l'ai ***<u>écrit</u>*** !, ce qui veut dire que « cette écriture n'a pas de sens », « n'a pas de sens physique », ce qui veut dire ….) Ajoutons que le calcul sur les nombres concrets est une des bases de l'analyse dimensionnelle : il s'agit d'un des principaux outils de résolution d'abord des problèmes d'arithmétique et de la physique y compris de haut niveau. On doit en enseigner le début en primaire en expliquant « *on n'ajoute pas des vaches et des cochons* ». Et l'on ne doit pas oublier ce qu'en disait le fameux physicien *John Archibald Wheeler* : « *Never calculate without first knowing the answer* ». Autrement dit : ne pas se lancer dans un calcul ,qui plus est compliqué, sans avoir trouvé au préalable, avec l'analyse dimensionnelle, la forme qualitative du résultat. Par exemple, si l'on divise des km par des heures on va trouver des km/h et c'est fort encourageant si l'on cherche une vitesse (et beaucoup moins si l'on cherchait une distance).

b) Après 1970

P. Jacquemier, membre important de l'APMEP et rédacteur des programmes du primaire de 1970 nous disait en 1972 :

> « *Les Instructions de 1945 parlent en plusieurs endroits de "nombres concrets". Cette expression […] est proprement antinomique, car un nombre ne saurait être concret* »[v]

P. Jacquemier s'appuie sur le fait incontestable que les mathématiques sont abstraites pour suggérer qu'un nombre, qui est mathématique, ne peut être le contraire c'est-à-dire concret. Discours on ne peut plus formel. Si on remplace « nombre concret » par la définition qui était donnée dans tous les manuels (voir *supra*), on trouve le fond du raisonnement « *L'expression « nombre concret » est proprement antinomique car un nombre ne peut pas être suivi du nom de son unité* »… Et il s'agit d'une position importante et récurrente puisqu'on la retrouve encore de nos jours (notamment sous la plume de Stella Baruk mais pas seulement...)

Donc plus de nombres concrets. Ce qui est visé est :

i) l'abandon des opérations sur les grandeurs, c'est-à-dire la notamment la coupure avec la physique

> *L'abandon des « opérations sur les grandeurs » est bien la mutation fondamentale apportée par les programmes transitoires, c'est lui qui transforme profondément les démarches de la pensée dans l'enseignement élémentaire.*[vi]

ii) le refus de l'appui sur la mesure pour introduire les nombres,

> *Les naturels ne sont plus liés à la mesure des objets du monde physique et, surtout, les opérations sur les naturels ne sont plus tirées des opérations sur les « grandeurs » du monde physique ou de l'univers quotidien telles que longueurs, poids, prix, capacités.*[vii]

---

[6] Ceci est un gros avantage des nombres purs qui permet, lorsque l'on a mis un problème en équations, toute une phase dans laquelle « on se laisse guider par le calcul ». Attention quand même.

iii) le refus de toutes les formes d'analyse dimensionnelle qui sont présentées comme des obstacles à la compréhension des élèves (ici de plus les exemples nous paraissent biaisés)

> *Une pédagogie ancienne, mais pas disparue, fait dire : « Si tu veux trouver des litres, il faut que tu commences par des litres ». C'est peut-être de tels dogmes, un tel arbitraire, de tels entraînements mentaux, qui empêchent les enfants de comprendre. En voici d'autres : quand on divise des francs par des francs, on ne doit pas trouver des francs ; quand on divise des litres par des vases, on trouve des litres.*[viii]

2) Le comptage est-il l'ABC du calcul ?

Pour répondre – partiellement – à cette question posée sur mon blog[ix] et qui reprend sous forme interrogative un titre de chapitre du livre « *La bosse des maths* » de Stanislas Dehaene, plaçons-nous en CP, classe dans laquelle on apprend la numération de 1 à 99.

a) Le cas des nombres concrets de 1 à 99

Le non enseignement des nombres concrets depuis plusieurs dizaine d'années – *ou, ce qui est quasiment équivalent, le fait de ne pas considérer un nombre concret comme un nombre* – fait que lorsque l'on parle de numération et de comptage, tout le monde pense au comptage avec les nombres purs et quasiment jamais au comptage avec des nombres concrets alors que les 1m ; 2m ; 3m … ou les 1 noisette ; 2 noisettes ; 3 noisettes… sont aussi fréquents que le comptage avec les nombres purs. La bonne question est donc : dans le cas de nombres concrets, de 1pomme à 99 pommes, le comptage est-il l'ABC du calcul ?

Lorsque l'élève compte des pommes dans le panier et dit 1 pomme, 2 pommes, 3 pommes … il peut donner le résultat de son comptage, par écrit ou oralement et dire /écrire (si on ne le lui a pas interdit et si on le lui a enseigné, bien sûr)

« 3 pommes » ou « 3 ***fois*** une pomme » ou « 3**×**1 pomme. »

Et donc si l'on envisage « la numération en nombres concrets », la multiplication est directement présente dans la définition même du nombre et donc avant même de se proposer de faire quelque calcul que ce soit. ***Quoi qu'il en soit, en ce cas, le comptage n'est pas ici l'ABC du calcul***[7].

b) Une argumentation pour le cas des nombres purs de 1 à 99.

Elle reprend en fait l'argumentation précédente en considérant ce coup-ci que l'unité est 1.Autrement dit définir un nombre pur nombre par le fait qu'il n'est pas suivi du nom de son unité ne signifie pas que la notion d'unité n'existe pas en ce cas mais qu'elle est sous-entendue, ce qui correspond à l'idée que 9, c'est « 9 fois 1 » ou « 9 × 1 ». Ce n'est en fait pas fondamentalement étonnant car si un nombre est une multiplicité (et à l'époque on l'on définissait un nombre comme une multiplicité, l'unité était l'unité et n'était pas un nombre) il n'est pas anormal de considérer que la notion de nombre entretient quelques rapports génétiques avec la multiplication.

Dans le contexte où l'unité est « toujours » « 1 » il est vrai qu'il n'est pas très utile de l'écrire mais il y a deux types de positions cachées sous la non-écriture des unités
- la notion d'unité existe mais est sous-entendue
- la notion d'unité n'existe pas ou son rôle est extrêmement réduit.

[7] La réforme des maths modernes était assez cohérente puisqu'elle refusait qu'à la question « *Combien mesure la table ?* », on réponde « 2 mètres » (Il fallait dire « *La longueur de cette table mesurée en mètres est 2* ») puisque cette expression « 2 m » cachait effectivement une multiplication, interdite par les programmes :-) .

Dans la conception qui se répand à partir de 1970, le mot et la notion d'unité pour designer 1 (et en particulier la phrase « 1 est l'unité ») ont tendance à disparaitre et n'ont toujours pas réapparu de nos jours[8] . « 1 » est en effet principalement considéré comme l'élément neutre de la multiplication ce qui induit l'idée un rôle extrêmement passif comparé à ce qu'en dit Ron Aharoni pour lequel la détermination de **l**'unité est l'opération fondamentale.

> « Quelle partie de l'arithmétique doit être enseignée en primaire ?
>
> La réponse, simple au point qu'elle en est embarrassante est : les quatre opérations. Mais cette réponse en apparence simple est trompeuse, pour deux raisons. L'une est le fait qu'il y a en fait cinq opérations. A côté des quatre opérations classiques, il en existe une cinquième, plus fondamentale et décisive : celle de former une unité. Prendre une partie du monde et déclarer qu'elle est un tout. Cette opération est à la base d'une grande partie des mathématiques du primaire »[x]

Mais il y aussi des conceptions qui n'utilisent pas du tout la notion d'unité entendue au sens de « ce que l'on compte ». C'est le cas par exemple de toutes les définitions axiomatiques des entiers naturels qui considèrent que le premier nombre est zéro – *ce qui n'est pas grave* – mais surtout qui engendrent 1 à partir de zéro. Dans ce cas, effectivement 1 n'est pas l'unité et il est inutile d'en parler en tant que telle, ce que les auteurs ne font d'ailleurs pas (sauf Peano qui dans l'une des formulations de son axiomatique, celle de 1889, utilise une fois le mot *unitas* pour designer 1).

On imagine mal poser comme question : *Dans 4 combien y-a-t-il de fois* $\emptyset \cup \{\emptyset\}$ *?* (La réponse est 4 fois !)

Dans ce cas, on ne peut donc pas dire non plus : le comptage est l'ABC du calcul.

c) ***Une autre argumentation pour le cas des nombres purs de 10 à 99***

Que signifie « comprendre le nombre 47 » ? *Comprendre ce que signifie l'écriture 47 et savoir compter 47 objets.*

i) ***Que signifie comprendre l'écriture 47 ?***
Cela signifie comprendre que 47 signifie « 4 *fois* 10 *plus* 7 » ou « 4×10+7 ». *Autrement dit comprendre l'écriture 47 suppose une certaine connaissance de l'addition et de la multiplication.*

ii) ***Comment procède un élève pour compter une collection de 47 billes ?***
A vue d'œil, le cardinal recherché dépasse 10. Il faudra donc compter d'abord des dizaines. Il enlève 10, puis encore 10 jusqu'à ce que l'on ne puisse plus l'enlever : il fait donc 4 soustractions et constate qu'il reste 7 billes. Comme la division est *fondamentalement* une soustraction répétée (et pas l'opération réciproque de la multiplication), il vient d'effectuer la division euclidienne de 47 par 10. *Il utilise donc la soustraction et la division et a donc une certaine connaissance de ces deux opérations.*

Donc tout est clair : au cours du premier apprentissage de la numération et à partir de 10
- on a besoin d'avoir obligatoirement une certaine connaissance des 4 opérations
- en ce cas et au sens strict, le comptage n'est pas l'ABC du calcul.

Ceci ne posait donc aucun problème jusqu'en 1970 car les quatre opérations étaient au programme du CP depuis 1882.

Finalement y-a-t-il des cas dans lesquels le comptage est l'ABC du calcul ? Oui, bien sûr et par exemple – car il y a d'autre cas – dans le cas de révisions globales de la numération et des quatre opérations, en début d'année de CM2 par exemple. En ce cas, l'enseignant fait d'abord réviser la numération et ensuite les quatre opérations.

En conclusion on a donc de nombreux arguments pour montrer que l'on ne peut pas affirmer tout de go : Le comptage est l'ABC du calcul *bien que ce soit vrai dans LE cas qui est vraiment celui qu'il faut avant tout*

---

[8] Dans le CP Tchou (Ed. Retz 2009) de Rémi Brissiaud que j'ai sous les yeux, on parle de « rajouter **une** unité » mais on ne définit jamais 1 comme **L**'unité. Le mot unité en ce sens n'apparait pas non plus dans le manuel de CP de la librairie des écoles alors que les orientations pédagogiques de la collection pourraient laisser supposer le contraire.

éviter en primaire, c'est-à-dire une progression qui commence par enseigner le comptage comme transposition didactique d'une axiomatique de constructions des entiers naturels et enseigne ensuite le calcul.

3) Petites remarques sur les 4 opérations en CP

a) Le programme de CP de 1970

L'apprentissage de la numération jusqu'à 99 ne pose aucun problème tant que les quatre opérations sont au programme du CP, c'est-à-dire de 1880 à 1970. *Mais les maths modernes innovent* et voici le programme de CP paru dans le BO du 2 janvier 1970 :

> Activités de classement et de rangement.
> Notion de nombre naturel.
> Nommer et écrire des nombres.
> Comparer deux nombres.
> Somme de deux nombres.[xi]

Les nombres de 1 à 99 sont au programme du CP mais
i) on constate la disparition de la soustraction, de la multiplication, de la division
ii) l'addition est la seule opération au programme de cette même classe.

Mais dirons certains, ce n'est pas parce que les autres opérations ne sont pas au programme que l'enseignant n'a pas le droit d'y faire allusion s'il l'estime nécessaire. **Pas du tout** et l'APMEP nous dit :

> *On ne peut plus étudier chaque naturel comme somme ou produit de naturels, étudier ses décompositions, car ces notions ainsi que celles de différence ou quotient seront abordées par étapes.*
> *APMEP,*
> *Marguerite Robert, op. cit., page 16.*

Ainsi, les partisans des maths modernes, qui portaient très haut la valeur de la logique et de la précision, en arrivent à prendre une position qui va fortement strictement contradictoire qui va nuire à l'enseignement de la numération.

b) En très bref : Les 4 opérations en CP
On sent bien que toutes ces questions tournent autour de la question dite « Les quatre opérations en CP ».C'est une question complexe et je n'en donnerai ici que quelques éléments d'analyse.

Tout d''abord il y quatre notions à ne pas confondre (je ne parle, une fois de plus, que du primaire)

(1) L'enseignement de l'arithmétique du primaire suivant les canons de la Méthode Intuitive
(2) Le contenu de l'article « Calcul intuitif » de Ferdinand Buisson qui ne parle que du début de l'enseignement du calcul
(3) La notion d'« enseignement simultané du comptage et du calcul »
(4) La présence des quatre opérations – sur les nombres purs – au programme du CP

Globalement, chaque ligne correspond à un ensemble de thèses et de recommandations qui est un sous ensemble des thèses de la ligne au-dessus. Il faudrait une analyse historique de leurs évolutions réciproques pour espérer avoir un avis fondé sur le sujet. Je ne ferai pas cette analyse aujourd'hui et je me contenterai de donner quelques informations sur les points qui suivent

i) *L'Enseignement simultané du comptage et du calcul* : lors du début de l'apprentissage de l'arithmétique (en gros pour les nombres de 1 à 99), *consiste, que ce début soit la maternelle ou le CP, à ne pas passer à l'étude d'un nouveau nombre N+1 sans avoir vu « toutes » les opérations et les décompositions qui utilisent le nombre N et des nombres inferieurs, comme nombres de départ ou comme résultats.*
C'est la conception que je défends publiquement depuis les années 90, dont j'ai découvert au début des années 2000 qu'elle faisait partie des thèses fondamentales de l'article « *Calcul Intuitif* » de Ferdinand Buisson. J'ai aussi utilisé l'expression « les quatre opérations en CP » orientation qui ne représente qu'une partie, et la

moins riche pédagogiquement, de « l'enseignement simultané du comptage et du calcul ». Par exemple une progression qui, en CP, ne commence l'enseignement de la division qu'à Pâques est une progression qui certes comporte « les quatre opérations en CP »mais ne respecte pas « *l'enseignement simultané du comptage et du calcul* ».

ii) Ferdinand Buisson et l'article « Calcul intuitif » ; au moment où la pédagogie progressiste se définit par la défense de la *Méthode intuitive*, au moment où Ferdinand Buisson en est le principal théoricien et propagateur en France, ce dernier, qui est aussi directeur de l'Enseignement primaire et, avec James Guillaume directeur de publication du Dictionnaire de Pédagogie , écrit donc le seul article du Dictionnaire qui associe la méthode intuitive et l'enseignement des débuts du calcul (c'est-à-dire exactement le domaine où la méthode intuitive est censée être la plus efficiente). Cet article est à la pointe des positions pédagogiques progressistes autant par son auteur que par son contenu. Il recommande, parmi d'autres postions tout aussi importantes, l'enseignement simultané de la numération et du calcul, qui entraine non seulement la présence des quatre opérations en CP mais l'abandon des progressions traditionnelles qui apprenaient successivement les quatre opérations. C'est ainsi que Ferdinand Buisson recommande l'enseignement simultané de la numération et du calcul et recommande l'abandon de la méthode, qu'il présente comme « *antique* » qui consiste à « *apprendre successivement aux élèves d'abord l'addition, puis la soustraction, puis les deux autres règles* [i.e. opérations] ». Et ce texte est d'autant plus important dans ces conséquences que c'est l'approbation par Buisson de l'enseignement simultané du comptage et du calcul présent dans l'article « Calcul intuitif » qui explique fondamentalement la présence, à partir des programmes 1882 et jusqu'en 1970, des quatre opérations au programme du début de l'enseignement du calcul et donc en particulier au programme du CP (et de la section enfantine avant que le CP n'existe).

iii) Les critiques de Remi Brissiaud, Joël Briand et Renaud d'Enfert

Remi Brissiaud, Joël Briand :
Aussi bien Remi Brissiaud que Joël Briand argumentent contre « les 4 opérations en CP » : ils affirment qu'il y a une exagération à parler « d'enseignement des quatre opérations en CP » car, notamment pour la division, le contenu enseigné en CP ne serait qu'un enseignement très partiel de cette opération. S'il est vrai les élèves à qui on a enseigné les 4 opérations en CP ne savent pas poser les divisions dont les nombres de départ sont « trop grands », je pense que, pour le reste, on peut dire qu'il est tout à fait possible qu'en fin de CP les élèves aient ce que j'appellerais, avec tous les guillemets nécessaires « une maitrise complète des bases de la division ». Je préciserai bien sûr ce point le plus rapidement possible et j'étendrai aux quatre opérations ce que les IO de 1945 disaient de la multiplication en CP, à savoir que le niveau atteint dans cette classe « <u>*parait suffisant pour acquérir la notion* ***complète*** *de multiplication*</u> »[xii].

Renaud d'Enfert :

Le cas de Renaud d'Enfert est diffèrent : il ne conteste pas <u>directement</u> la valeur « de l'enseignement des 4 opérations en CP » ***mais pour lui l'origine <u>exclusive</u> de cette mesure est « l'enseignement concentrique »*** Cette conception aurait été justifié à l'époque parce qu'elle permettait de dispenser « *à tous les élèves les connaissances nécessaires pour entrer dans la vie active* » de manière à ce que, « *quel que soit le temps passé à l'école, les élèves aient étudié, certes de façon plus ou moins complète, l'ensemble des notions inscrites au programme* » ; ce « [système concentrique] *conduit à mener de front l'apprentissage de notions mathématiques qui autrefois se succédaient, et donc à rendre certains apprentissages plus précoces. C'est ainsi que […] que les quatre opérations sont inscrites non seulement au programme des cours élémentaire, moyen et supérieur, mais aussi à celui de la classe enfantine qui accueille les enfants de 5 à 7 ans et de son équivalent à l'école maternelle* » (arrêtés des 27 et 28 juillet 1882)[xiii]. Et il précise bien :

> Mais <u>***surtout***</u>[xiv], le système adopté [i.e. le système concentrique] conduit à mener de front l'apprentissage de notions mathématiques qui autrefois se succédaient et donc à rendre certains apprentissages plus précoces. C'est ainsi que l'étude de la division est déplacé vers l'amont de la scolarité, de telle sorte que les quatre opérations sont inscrites non seulement au programme des cours élémentaire, moyen et supérieur, mais aussi a celui de la section enfantine qui accueille les enfants de 5 à 7 ans[xv].

Quasiment tous les éléments utilisés par Renaud d'Enfer pour justifier sa thèse « *les 4 opérations en CP sont une conséquence exclusive de l'enseignement concentrique* » ont au mieux de très graves faiblesses

1- Il ne cite jamais – et pour cause– un quelconque document officiel ou provenant d'une personnalité de premier plan qui établit un lien explicite entre les deux phénomènes
2 - Il procède donc par recoupements mais dans ces recoupements il utilise, comme je le montrerai en détails d'ici peu, des raisonnements qui ne sont pas seulement hasardeux mais sont aussi orientés. Renaud d'Enfert présente l'objectif de l'enseignement concentrique sous la forme « *quel que soit le temps passé à l'école, les élèves aient étudié, certes de façon plus ou moins complète, l'ensemble des notions inscrites au programme* ». Il induit donc fortement l'idée que la conséquence de l'enseignement concentrique que sont « les 4 opérations en CP » est un enseignement au rabais Alors que dans le texte de Buisson cet enseignement simultané du comptage est du calcul loin d'être un enseignement au rabais vise à une compréhension plus conceptuelle de la connaissance du nombre.
3- ***Le plus fondamental : jamais Renaud d'Enfert ne mentionne l'existence du texte Calcul intuitif de Ferdinand Buisson, texte qui lui donne explicitement tort sur tous les plans***. Et comme il publie aussi des recueils de textes de référence sur l'Education, il y oublie également ce texte. Ce n'est pas grave : c'est le seul texte portant sur la méthode intuitive en calcul, écrit par le principal avocat et théoricien de la méthode intuitive au niveau mondial qui est simultanément le directeur de l'enseignement primaire d'un pays dans lequel il a mené des reformes qui font que même Engels dira qu'il s'agit de la meilleure école du monde (voir *infra*).
On peut faire des hypothèses sur les raisons qui font que Renaud d'Enfert oublie cette référence fondamentale. S'il ne connait pas cette référence, c'est simplement un mauvais historien.
Mais une autre hypothèse surgit ; aurait-il volontairement oublié cette référence ? De nombreuses raisons militent en ce sens :
- Si pendant tout un temps, le texte était difficile d'accès, je l'ai mis en ligne en 2003 ; et jusqu'à aujourd'hui 17 novembre 2017, Renaud d'Enfert, à ma connaissance, ne s'est toujours pas aperçu de son existence.
- Ce texte *Calcul intuitif* porte sur une question centrale (les débuts de l'apprentissage du calcul et de la numération), sujet sur lequel les maths modernes ont pris le contrepied exact de Buisson en se prétendant progressistes. Or la lecture du texte de Buisson montre que, au contraire, les positions du BO de 70 ne sont pas un progrès mais une régression vers « un antique usage », ce qui bouleverse sur une question centrale les grands axes d'explication admis comme vérités par une majorité de secteurs responsables de l'Education.

VI) Retour sur l'importance de la transposition didactique

1) Le rôle central de la transposition didactique dans la didactique

On vient de voir deux aberrations fondamentales du programme de maths modernes pour le primaire : d'une part le refus des nombres concrets et d'autre par l'abandon « des quatre opérations en CP » allant jusqu'à la limitation stricte à la seule addition des opérations au programme de cette classe.
Quelle en est l'origine ?
C'est parce que les programmes de maths modernes ont été élaborés en partant du « savoir savant » sur la numération *–essentiellement les axiomatiques pour la construction des entiers et en particulier l'axiomatique de Peano –* que l'on transpose pour le CP: fondamentalement ces conceptions axiomatiques
i) ne portent que sur les nombres purs (donc la notion d'unité n'y a aucune existence)
ii) n'utilisent comme opération qu'une réduction de l'addition à la notion de successeur qui consiste à « ajouter 1 ».

L'APMEP de l'époque a donc bien réussi ce qu'elle visait en janvier 68, une conception structurale et axiomatique de l'enseignement en CP.

On remarquera également que si l'on s'intéresse au résultat produit par la transposition didactique d'une notion,
- soit on est dans la dichotomie infernale signalé par Guy Brousseau (*Le professeur doit alors choisir "entre enseigner un savoir formel et dénué de sens ou enseigner un savoir plus ou moins faux qu'il faudra rectifier."),*
- soit l'enseignement se réduit à n'être au mieux qu'une vulgarisation car la transposition didactique a comme propriété fondamentale de détruire la notion de progression.

2) L'influence « au moins très significative » de la didactique française dans la didactique mondiale

Pendant les années 70/80 les courants pédagogiques travaillant sur d'autres matières que les mathématiques commencent à revenir sur les réformes en cours depuis une dizaine d'années et en tentent d'en faire une critique. Comme le seul début de corpus théorique disponible est celui élaboré par la didactique des mathématiques, cette dernière va spontanément jouer un rôle central dans l'élaboration de la didactique d'autres matières à tous les niveaux et c'ainsi que par exemple que la transposition didactique est maintenant un outil pédagogique dans toutes les matières.

Autrement dit, si l'on veut avoir une problématique historique et pas seulement structurelle, *comprendre les problèmes didactiques relevant de toutes les matières et tous les niveaux pour la majorité des pays du monde* suppose de comprendre ce qui en est l'origine et les fondamentaux extrêmement riches : la réforme des maths modernes en France (et la contre-réforme suivante) et en particulier la réforme des maths modernes en CP. *Il n'y aucune exagération dans cette affirmation*.

Ce n'est pas un hasard si la France a un rôle de premier plan dans l'élaboration des thèses nocives de la didactique, rôle reconnu mondialement car la « Commission internationale de l'enseignement mathématique » qui récompense les didacticiens français dans un rapport hors de proportion avec le poids démographique de la France. La didactique française a eu en effet à fournir une argumentation très serrée car elle avait à s'opposer à une école qui, même si elle avait des défauts et même de graves défauts, était de très haut niveau car elle était pédagogiquement la descendante de l'école de Ferdinand Buisson et James Guillaume, qu'Engels appréciait ainsi en 1885 « *Les Français disposent à présent des meilleures écoles du monde.* » (Friedrich Engels, Lettre du 28 octobre 1885 à August Bebel.) Et même si en 1950 cette école n'était plus celle de 1885, elle en gardait de beaux restes puisque en 1960, Antoine Prost, expliquait que les programmes français avaient en moyenne deux ans d'avance sur les programmes des autres pays[9].

VII) CQFD ?

La réforme dite des maths modernes (début des années 70), est reconnue – aussi bien par ses opposants que par ses partisans - comme principale réforme de l'enseignement primaire depuis la « rénovation pédagogique » des années 1880, rénovation pédagogique dans laquelle Ferdinand Buisson et James Guillaume ont un rôle fondamental. *Si l'on s'attache aux éléments historiques traités supra*, la réforme des maths modernes dans ces domaines non seulement n'est pas un progrès, comme ses partisans l'ont prétendu et le prétendent encore, mais elle représente au contraire une régression à une conception moyenâgeuse et dogmatique de l'enseignement, qui est précisément la conception que tous les grands théoriciens progressistes sans exception, de Comenius à F. Buisson ou Charles-Ange Laisant en passant par Pestalozzi ont mis au centre de leur critique. Si l'on veut savoir si ce diagnostic s'entend à d'autres domaines du calcul et d'autres matières, il faut avancer sur les *Questions Fondamentales Disciplinaires* correspondantes.

Cabanac, le 17 novembre 2017
Michel Delord

[9] « *D'après les comparaisons internationales faites par R. Dottrens en 1954, les petits Français apprennent à conjuguer les verbes deux ans plus tôt que les Allemands ou les Hollandais ; ils commencent l'analyse logique deux ans avant les Allemands, quatre ans avant les Italiens ; ils doivent savoir compter jusqu'à 1000 quand leurs voisins les plus avancés s'arrêtent à 20 ; ils apprennent la multiplication et la division par des nombres à deux chiffres un an avant les Allemands et les Hollandais, deux ans avant les Belges ou les Italiens. Quand les Belges et les Hollandais abordent le calcul des pourcentages dans la 5e année d'école, et les autres dans leur 6e, les Français s'y attaquent dès leur 4e année d'études*. » Antoine Prost, *Histoire générale de l'enseignement et de l'éducation*, Tome IV : L'école et la famille dans une société en mutation (1930-1980), Nouvelle Librairie de France G.-V. Labat-Éditeur, Paris 1981.

PS : Je ne voudrais pas finir ce texte sans aborder deux points :

Intuition et rationalisation

Même si le fond de ma critique concerne les contenus enseignés, je m'oppose dans ce texte en permanence à l'aspect formaliste et non intuitif de la réforme des maths modernes. Je ne voudrais pas, en ce sens, que ma position encourage, y compris au niveau primaire qui est celui dont je parle essentiellement, un refus de la formalisation, position qui fait partie des pires fausses critiques des maths modernes. Si l'on essaie de trouver une formule qui résume ma position et si l'on considère qu'il y a une liaison forte entre l'abstraction et la formalisation, je prendrai bien celle de Buisson qui dit « *l'on se sert des sens non pour* que [l'élève] *y ait recours toute sa vie, mais pour lui apprendre à s'en passer* » (F. Buisson. *Intuition et méthode intuitive*, Dictionnaire Pédagogique). Et pour que ce principe ne soit pas une simple phrase sans conséquences, il faut proposer explicitement des programmes et des progressions élaborés avec le souci principal de bien respecter les liens entre intuition et rationalisation, programmes qui n'ont rien à voir avec les programmes actuels qui sont des catalogues de compétences.

Un ton trop tranchant

Avant d'écrie cet article, et j'avais fait de même pour le précédent (sur les Singapore Maths), j'avais d'abord pris conseil et après rédaction certains trouvaient que j'étais trop agressif et tranchant tandis que d'autres me félicitaient d'employer l'expression *« l'élixir du Dr Chevallard »* pour désigner la transposition didactique. Comme je traite de tendances historiques lourdes*, il est inévitable dans une première étape de ne pas faire dans la nuance et ce d'autant plus que j'analyse des questions sur laquelle la position est en gros constante sur plusieurs dizaines d'années. Un exemple en est « les 4 opérations en CP » : il y a bien les 4 opérations en CP de 1882 à 1970 (même s'il y a des différences entre les programmes 1882 et ceux de 1945) et il n'y a plus les 4 opérations en CP de 1970 à maintenant même si évidemment les programmes de CP ne sont pas les mêmes entre les deux dates.*

C'est le même problème qui se pose lorsque je parle de l'APMEP sans autres précisions : je sais bien sûr i) qu'il y a des membres de l'APMEP – j'en connais – qui partagent une grande partie de mes opinions et 2) que même si la position de l'APMEP est constante de 1970 à maintenant sur son opposition aux « 4 opérations en CP », il y a des différences entre la position de l'APMEP sur les 4 opérations en CP en 1970 et maintenant .

Brève bibliographie :

Pour Ferdinand Buisson, James Guillaume et le Dictionnaire Pédagogique et d'Instruction primaire :

http://michel.delord.free.fr/dp.html

Deux articles sur la méthode Intuitive de Ferdinand Buisson :

http://micheldelord.info/fb-intuit-conf1878.pdf

http://micheldelord.info/fb-intuit-dp.pdf

L'article Calcul Intuitif

http://micheldelord.info/fb-calc_intuit.pdf

Le BO / programme des maths modernes en primaire en 1970

http://micheldelord.info/bo70.pdf

APMEP : le texte de référence sur les maths modernes en primaire

http://micheldelord.info/apmep72.pdf

Notes de fin

[i] Développé dans le paragraphe « *La lecture, moyen et objectif de l'acquisition d'une culture générale* » du texte fondateur SLECC de 2004. http://michel.delord.free.fr/slecc.pdf

[ii] "Libre adaptation" de E. D. Hirsch, *Reading Comprehension Requires Knowledge - of Words and the World*, American Educator, Spring 2003. https://www.aft.org/sites/default/files/periodicals/AE_SPRNG.pdf

[iii] http://micheldelord.info/chambery.html ou https://www.apmep.fr/CHARTE-DE-CHAMBERY-1968 ou

[iv] Rudolf Bkouche, L'enseignement scientifique entre l'illusion langagière et l'activisme pédagogique, http://micheldelord.info/rb/rb-illu_activism.pdf

[v] [APMEP72-JACQ], Philippe Jacquemier, *Promenade au long du programme du 2 Janvier 1970 et des commentaires qui les accompagnent*, in *La mathématique à l'école élémentaire*, Paris, Supplément au bulletin APMEP n° 282, 1972, 502 pages, pages 43 à 52, page 62.

[vi] [APMEP72-MROB], Marguerite Robert, *Réflexions sur le programme rénové : Un nouvel état d'esprit*, in *La mathématique à l'école élémentaire*, Paris, Supplément au bulletin APMEP n° 282, 1972, 502 pages, page 16.

[vii] [APMEP72-MROB] page 15.

[viii] [APMEP72-JACQ] page 63.
[ix] http://micheldelord.blogspot.fr/2017/11/le-comptage-est-il-labc-du-calcul-suivi.html

[x] Ron Aharoni, *What I Learned in Elementary School* *, Revue de l'AFT, 2005.
https://www.aft.org/periodical/american-educator/fall-2005/what-i-learned-elementary-school
*This article is adapted from a 2003 address to the British Mathematical Colloquium in Birmingham, England.

[xi] Arrêté du 2 janvier 1970, page 2. http://michel.delord.free.fr/bo70.pdf

[xii] Programmes et Instructions officielles de 1945, page 11 : http://michel.delord.free.fr/iocalc45.pdf

[xiii] http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/en-debat/place-du-calcul-enseignement-primaire/renaud_denfert

[xiv] C'est moi qui souligne, MD.

[xv] http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/2006/108/smf_gazette_108_67-81.pdf