

Comment réfléchir *ensemble* sur les programmes de mathématiques à l'école ? (Réponse à Michel Delord)

Rémi Brissiaud

MC de Psychologie cognitive à l'IUFM de Versailles
Équipe « Compréhension, Raisonnement et Acquisition de Connaissances »
Laboratoire Paragraphe (Paris 8)

En mai 2006, la commission parlementaire des affaires culturelles, familiales et sociales a publié le rapport d'une mission d'information qu'elle a menée sur l'enseignement des disciplines scientifiques dans le primaire et le secondaire. Dans les recommandations finales de ce rapport connu sous le nom de « Rapport Rolland » (p. 77), on lit qu'il faudrait... « développer l'apprentissage des techniques opératoires des quatre opérations dès le cours préparatoire ». Début juin, le Café Pédagogique a bien voulu mettre en ligne un article que j'ai rédigé à la suite de cette publication : « *Calcul et résolution de problèmes : il n'y a pas de paradis pédagogique perdu* »¹.

Le 4 juillet, j'ai reçu par courriel une réaction de Michel Delord, membre du conseil d'administration de la Société Mathématique de France. Comme il me l'annonçait dans ce courriel, j'ai pu vérifier que ce jour-là et les suivants, cette réaction était rendue publique sur son site personnel. Un long résumé en a d'ailleurs été diffusé sur différentes listes. À la date du 11 juillet, sa réponse a déjà disparu de son site. C'est assez inhabituel et cela laisse perplexe. Or, le texte de Michel Delord contient certaines attaques qui me visent personnellement et il a été rendu public pendant plusieurs jours. Il me semble nécessaire d'y répondre. Ne sachant si ce texte redeviendra public, je le joins à celui de ma réaction.

Cependant, mon objectif principal dans ce texte va au-delà de ce droit de réponse : il est de montrer que les propositions pédagogiques de Michel Delord ne s'appuient ni sur l'analyse raisonnée des pratiques des maîtres dans leur histoire, ni sur les résultats des recherches scientifiques concernant les apprentissages mathématiques à l'école. Ses propositions pédagogiques ont ainsi un aspect aventureux qui devrait conduire les « décideurs » comme les mathématiciens qui les soutiennent, à une plus grande prudence. J'aborderai successivement 9 points, les problèmes de forme évoqués précédemment seront abordés dans le premier.

1°) Dans son texte, Michel Delord a rendu publique ma réponse à un courriel qu'il m'avait envoyé en 1999. C'est regrettable : cette confusion entre l'échange public et la correspondance privée peut nuire gravement à la sérénité des échanges. C'est d'autant plus ennuyeux qu'il a rendu publique cette réponse sans communiquer le ou les courriels qui l'ont précédée : comment les lecteurs peuvent-ils se former un jugement sur le contenu de la réponse à un message qu'ils ignorent ? Je n'ai évidemment pas conservé de trace de ce courriel (il date de 1999 et, à l'époque, Michel Delord n'avait aucune sorte de notoriété !). Tout ce que je peux en dire

¹ <http://www.cafepedagogique.net/dossiers/contribs/brissiaud2.php>

aujourd'hui est que, comme tout le monde, j'essaie de gérer mon temps du mieux possible et qu'à cette époque, je n'imaginai nullement que les propositions de Michel Delord puissent avoir le moindre impact auprès des « décideurs » et auprès d'éminents chercheurs en mathématiques. Je n'imaginai nullement que ces propositions seraient à l'origine d'un Groupe de Réflexion Interdisciplinaire sur les Programmes (GRIP) et qu'il me serait nécessaire un jour de consacrer du temps à débattre de ces positions : souvent, en effet, je les trouve très déraisonnables.

Il convient également de regretter l'emploi que fait Michel Delord de certaines formules dont on pressent qu'elles se veulent blessantes. Par exemple, il me qualifie de *mufti* parce que je me suis exprimé à un moment sous une forme qui lui a semblé trop affirmative. Or, d'une part, il n'est pas sûr que la lecture des *Lettres Persanes* soit très fréquente aujourd'hui et il faut être bien naïf pour ne pas se rendre compte que qualifier quelqu'un de *mufti* dans le contexte actuel risque d'être très mal interprété. D'autre part, qu'apporte au débat l'usage de ce type de formule ?

Enfin, je suis enseignant chercheur en psychologie cognitive. De ce fait, Michel Delord considère qu'en intervenant dans un débat sur l'enseignement des mathématiques à l'école, je me situe « *en dehors de (mon) territoire propre* » et que « *d'aucuns ne manqueront pas de juger (cette intervention) intempestive* ». C'est vraisemblablement sa pensée qu'il exprime ainsi et je reviendrai plus loin sur ce jugement.

2°) Sur le fond, il convient de remarquer que, dans son texte, Michel Delord répond essentiellement au contenu d'une note de bas de page du mien (celle qui concerne les « nombres concrets » et la commutativité de la multiplication). Or la thèse principale défendue dans mon texte concerne la division. Elle est la suivante : il est faux de dire qu'avant 1970, la division était enseignée au CP et au CE1 parce qu'en fait, à cette époque et à ce niveau de la scolarité, **une seule** situation était étudiée : celle où l'on partage une collection en parts égales et où l'on recherche la valeur d'une part. Or, une écriture comme $21 : 3$ renvoie principalement à **deux** sortes de situations : celles où l'on partage 21 unités en 3 parts égales, bien sûr, mais aussi celles où l'on groupe ces unités par 3 (en 21, combien de fois 3 ?). On peut même considérer que la raison d'être de la division avec reste, ce qui la différencie du simple partage ou du simple groupement, est d'être un *traitement commun* à ces deux sortes de situations. Or, le fait que les deux sortes de situations (partage et groupement) puissent être traitées par la même opération n'a rien d'évident dans le cas de la division avec reste nul (*in fine*, l'explication réside dans la commutativité de la « multiplication à trou »), passons sur la difficulté de le comprendre dans le cas d'une division avec reste non nul.

Dans mon texte, ayant étudié les deux principaux manuels utilisés entre 1945 et 1970, il s'avère que le formalisme de la division n'y était utilisé au CP et au CE1 que pour résoudre des problèmes de partage où l'on cherche la valeur d'une part². Or, c'est *une erreur pédagogique grave* d'enseigner sur une longue durée que le mot « diviser » et le mot « partager » sont synonymes. Cela crée le même genre de difficulté que celle qu'on observe chez les écoliers et les collégiens dans l'emploi des mots « rectangle » et « carré ». Ces mots, dans le langage quotidien fonctionnent au même niveau de généralité alors que le mot « rectangle », d'un point de vue mathématique a une signification plus générale que le carré (qui est un rectangle particulier). Ainsi, lorsqu'un maître introduit en classe le mot « diviser » (et les symboles qui

² Dans d'autres manuels, la division par 2 est enseignée au CP dans une situation de partage alors que celle par 5 l'est dans une situation de groupement, sans justification de ce changement de signification. Mais au CE1, comme dans le « Calcul vivant » et le « Calcul quotidien », seule la situation de partage est étudiée.

l'accompagnent : les deux points, la potence), c'est une erreur grave de ne pas les utiliser d'emblée avec une signification plus générale que le mot « partager » (les situations de partage sont des situations de division particulières). En effet, autant les maîtres n'ont guère de possibilité de changer le fonctionnement quotidien des mots « rectangle » et « carré », autant ils peuvent choisir concernant l'opération arithmétique qui nous intéresse :

- A) De proposer des problèmes de partage et de groupement aux élèves durant le CP et le CE1, mais sans utiliser un quelconque formalisme : les recherches scientifiques montrent que si les nombres en jeu ne sont pas trop grands, les élèves savent résoudre ce type de problèmes par des procédures informelles telles qu'une distribution ou bien en testant des hypothèses à l'aide de relations numériques connues.
- B) N'introduire le mot « diviser » et les symboles qui l'accompagnent qu'en classe de CE2, c'est-à-dire au moment où l'enseignant cherche à faire comprendre aux élèves que les deux sortes de situations (partage et groupement) peuvent être traitées par la même opération.

Les enseignants qui procèdent ainsi aujourd'hui enseignent l'équivalence entre le partage et le groupement au même niveau de scolarité qu'avant 1970, mais ils aident mieux leurs élèves à comprendre que la division n'est pas seulement le partage.

Plus généralement, j'ai montré dans le texte mis en ligne sur le Café Pédagogique qu'il existe aujourd'hui des progressions pédagogiques qui conservent tous les avantages de celles d'avant 1970 (y compris le fait de favoriser la mémorisation précoce des relations numériques) et qui corrigent leurs inconvénients, dont le précédent est le principal (mais pas le seul). Le retour à l'enseignement des 4 opérations dès le CP serait donc un « choix perdant ». Michel Delord n'a pas répondu sur le fond à cette partie de mon texte qui, il convient de le signaler, contient aussi des critiques de certains aspects des programmes actuels³. Il est vrai que Michel Delord annonce la publication d'une seconde partie à sa réponse.

3°) Michel Delord avance quand même certains arguments contre le point de vue développé dans mon texte. Ainsi, pour analyser les pratiques pédagogiques anciennes, je me suis référé à des manuels utilisés entre 1945 et 1970. Or, il reproche aux programmes de 1945 d'avoir été contaminés par l'idéologie pétainiste et il aurait préféré que je me réfère aux programmes de 1882 ou 1923. En fait, cela a peu à voir avec mon argumentation car je me réfère plus aux pratiques des maîtres, telles qu'on peut les analyser à travers les outils qu'ils utilisaient, qu'aux programmes eux-mêmes. Ainsi, les programmes de 1945, eux, recommandaient d'enseigner à la fois le partage et le groupement dès le CP et à tous les niveaux de la scolarité. Ce sont les maîtres qui, via les outils qu'ils choisissaient, ont décidé à cette époque d'interpréter les programmes dans un sens qui anticipait leur réforme en 1970 : à cette époque, en effet, les maîtres commençaient tout juste à abandonner le manuel unique pour le CE et, donc, à utiliser des manuels différents au CE1 et au CE2. Ils choisirent de reporter au CE2 l'abord des deux significations de la division (vraisemblablement parce que les élèves de CE1 comprenaient mal l'équivalence des deux sortes de situations et l'on ne voit pas comment il aurait pu en être autrement). Ce n'est pas un hasard si, aujourd'hui encore, c'est à ce niveau de la scolarité (le

³ Ce qui m'a valu d'autres réponses, au ton vif, de la part de collègues qui auraient souhaité que je ne critique d'aucune façon les programmes actuels. L'ensemble du dossier est consultable sur : <http://www.cafepedagogique.net/dossiers/contribs/calcul.php>

CE2) que beaucoup de maîtres choisissent d'enseigner l'équivalence entre le partage et le groupement, c'est-à-dire, à strictement parler, la division.

C'est là un premier exemple d'une tendance forte chez Michel Delord à se référer principalement aux textes officiels et non à ce que faisaient effectivement les maîtres aux époques considérées.

4°) Voici un deuxième exemple du peu de cas qu'il fait des pratiques effectives des enseignants et des leçons que ceux-ci tiraient de ces pratiques. J'ai écrit dans mon texte, en me référant aux deux séries d'ouvrages les plus utilisées entre 1945 et 1970, que :

Aussi bien dans la série « Le calcul vivant » que dans la série « Le calcul quotidien », au CE1, la seule signification qui était attribuée à une égalité telle que « 21 cerises : 3 = 7 cerises » était la suivante : si 21 cerises sont partagées entre 3 personnes, chacune d'elle en reçoit 7. Avant le CE2, à aucun moment, l'enseignant ne disait explicitement à ses élèves que la division sert aussi à résoudre les problèmes de groupement, c'est-à-dire que l'égalité « 21 : 3 = 7 » renvoie aussi à un scénario où les cerises sont groupées par 3 et où 7 exprime alors le nombre de groupes de 3 cerises. On remarquera d'ailleurs que le seul fait de noter « cerises » dans l'égalité, ce qui se faisait systématiquement dans les petites classes à l'époque (cf. ci-dessous) place nécessairement l'égalité dans un contexte de partage. On ne peut pas écrire : « 21 cerises : 3 = 7 groupes de 3 cerises »

Michel Delord semble considérer comme un argument définitif en faveur de son point de vue, le fait que je n'ai pas analysé dans mon texte l'écriture :

« 21 cerises : 3 cerises = 7 ».

Or, je ne l'ai pas fait pour la seule raison qu'on ne la trouvait jamais dans les manuels d'avant 1970 (ou alors de manière très marginale parce que, personnellement, je ne l'ai jamais rencontrée dans le grand nombre de manuels que j'ai consultés). À cette époque, à partir du CE2 pour l'essentiel, les enseignants rendaient compte d'un groupement de 21 gâteaux par paquets de 3, en écrivant :

« 21 : 3 = 7 paquets ».

Et dans le cas où le stock initial était de 23 gâteaux, ils écrivaient éventuellement :

« 23 : 3 = 7 paquets ; il reste 2 gâteaux »

À ma connaissance, ils n'écrivaient jamais :

« 23 gâteaux : 3 gâteaux = 7 paquets ; il reste 2 gâteaux ».

Pourquoi les enseignants ne le faisaient-ils pas (ou, peut-être, ne le faisaient-ils plus) ? Même s'ils ne le formulaient pas ainsi, on peut penser que c'est parce qu'ils avaient l'intuition que les écritures arithmétiques ont deux fonctions :

- A) Elles sont des abréviations sténographiques permettant de reformuler l'information contenue dans l'énoncé tout en organisant cette information
- B) Le symbolisme arithmétique a aussi un rôle de schématisation (au sens psychologique du terme) : comme le même symbolisme est utilisé dans des situations différentes (celles de partage et celles de groupement, par exemple), il favorise le regroupement de ces situations au sein d'une même catégorie (celles des problèmes de division, par exemple). De plus, dès cette époque, les maîtres avaient le souci que la première fonction ne s'effectue pas au détriment de la seconde et ils évitaient donc des expressions telles que :

« 23 gâteaux : 3 gâteaux = 7 paquets ; il reste 2 gâteaux » où l'opération disparaît derrière l'histoire racontée.

Ce que Michel Delord semble préconiser, donc, va au-delà de ce qui était effectivement fait dans les classes à l'époque. Ses propositions ont ainsi un côté novateur, voire aventureux. Il conviendrait d'être prudent dans l'usage de ce type de pédagogie avec des élèves.

5°) Pour clore sur ce sujet, il convient de préciser que si je me réfère aux IO de 1945 (ce que Michel Delord me reproche), c'est parce que ce sont les dernières qui préconisaient l'enseignement des 4 opérations et de leur formalisme dès le CP. Comme nous venons de le voir, si Michel Delord préfère se référer à 1923, voire 1882, cela ne fragilise en rien mon argumentation. En revanche, il me semble qu'il fait alors peu de cas d'une des principales préoccupations des inspecteurs du début du siècle dernier, qui avaient le souci de sortir les enseignants de ce qu'on appelait à l'époque le "verbalisme" : faire réciter par coeur des définitions que les enfants ne comprenaient pas. L'avis de cet autre sorte de praticiens que sont les inspecteurs, semble également lui importer peu.

6°) Venons-en à ce qui constitue le corps de sa réponse : la question des « nombres concrets ». Il semble me considérer comme un défenseur de *la lettre* du texte instituant la réforme de 1970. Si c'est le cas, il se trompe de cible : il me semble avoir été, il y a plus de 15 ans, parmi les premiers à proposer aux élèves des exercices où ils sont conduits à écrire des égalités telles que : "6 cm = 60 mm" ou "1/4m = ... cm". Et, en divers endroits, j'ai montré que je ne considérais nullement la production d'une écriture telle que « 4 € + 2 € 30 = 6 € 30 » comme la transgression d'un tabou.

Par ailleurs, j'ai été un des seuls pédagogues à adopter une position très mesurée vis-à-vis de la pratique pédagogique encore courante aujourd'hui qui consiste, lors d'une résolution de problèmes où l'on cherche le résultat d'une addition répétée, à faire écrire aux élèves le multiplicande en premier (sans indication écrite de l'unité mais en interprétant oralement le nombre correspondant comme celui qui indique l'unité du résultat) et le multiplicateur en second. Dans le livre du maître que Michel Delord cite dans son texte, je dis explicitement que cela revient à faire pratiquer aux élèves ce qu'il appelle une « analyse dimensionnelle ». La seule différence entre cette pratique pédagogique et l'usage ancien des « nombres concrets » est que l'analyse dimensionnelle se fait alors de manière orale. On comprend bien pourquoi cette pratique pédagogique peut avoir un effet bénéfique et, en l'absence d'étude scientifique sur l'effet d'une telle pratique, il ne convient surtout pas de la condamner.

7°) En revanche, il est vrai que je me revendique un héritier d'un certain esprit qui a présidé à la réforme de 1970 : celui qui consiste à débattre des options didactiques en s'appuyant sur l'avis raisonné des praticiens, sur des arguments de nature épistémologique et sur les résultats de la psychologie scientifique. Par exemple, il peut être utile pour prendre des décisions didactiques concernant la multiplication de savoir que des psychologues (Schliemann et collègues, 1998⁴) ont proposé ces problèmes à des "enfants de la rue" de 12 ans environ qui n'avaient jamais été scolarisés :

M1 : "Quel est le prix de 3 objets à 50 cruzeiros l'un ?"

M2 : "Quel est le prix de 50 objets à 3 cruzeiros l'un ?"

⁴ Schliemann, A. D., Araujo, C., Cassundé, M.A., Macedo, S. & Nicéas, L., Use of multiplicative commutativity by school children and street sellers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29, 422-435, 1998.

Le taux de réussite à M1 est de 75%, alors que pour M2, il est de... 0%.

Je voudrais montrer que ces résultats peuvent aider à choisir un mode d'introduction du signe « x » plutôt qu'un autre, car l'usage pédagogique de ce signe peut être pensé soit comme principalement mis au service de l'expression d'une addition répétée (le signe « x » évite d'écrire un grand nombre de signes « + ») et de l'interprétation des différents nombres en jeu, soit comme principalement mis au service de l'usage de la commutativité. Donnons un exemple de ce dernier choix.

Si les élèves ont compris qu'il y a le même nombre d'unités dans a groupes de b unités que dans b groupes de a unités (et la disposition en lignes et colonnes est évidemment utile pour en prendre conscience), on peut décider de noter d'emblée, dès la leçon d'introduction du signe « x », ce nombre $a \times b$ ou $b \times a$ (il s'agit là d'une véritable « définition » de ces écritures : chacune d'elles désigne indifféremment le nombre d'unités dans a groupes de b ou b groupes de a , c'est le même !). Lorsqu'il s'agit de calculer 7×10 , les enfants se posent alors la question du calcul le plus facile : est-ce celui du nombre d'unités dans 7 groupes de 10 ou dans 10 groupes de 7 ? En l'occurrence, il est plus facile de « compter des 10 » que de « compter des 7 » et le calcul se fait « de gauche à droite » : 7×10 est calculé comme 7 fois 10. En revanche, s'il s'agit de calculer 7×2 , il est plus facile de déterminer le nombre d'unités dans 2 groupes de 7 que dans 7 groupes de 2. Le calcul se fait alors « de droite à gauche » : 7×2 est calculé comme 2 fois 7. Dans cette façon d'introduire le signe « x », donc, la commutativité de la multiplication est d'emblée présente et même, mieux, d'emblée utilisée par les élèves pour calculer mentalement.

Il est donc facile d'argumenter que ce mode d'introduction du signe « x » sollicite mieux que celui qui avait cours avant 1970, l'usage de la commutativité. Or, de manière évidente, les résultats de Schliemann et collègues mettent en évidence que l'appropriation de la commutativité de la multiplication dépend entièrement de la scolarisation. Ils incitent donc à favoriser un usage pédagogique du signe « x » qui mobilise d'emblée la commutativité plutôt que de privilégier, comme cela était fait avant 1970, sur une longue durée, l'usage de ce signe comme seule expression de l'addition répétée et comme aide à l'interprétation des différents termes. Par ailleurs, le choix de favoriser d'emblée l'usage de la commutativité n'a pas d'inconvénient parce qu'on dispose d'autres moyens pédagogiques pour travailler l'autre aspect (le signe « x » comme abréviation sténographique de l'addition répétée). Là encore, comme pour la division, le retour aux pratiques d'avant 1970 serait un « choix perdant ».

Je ne comprends pas pourquoi Michel Delord refuse *a priori* de prendre en compte les résultats d'études scientifiques comme celles de Schliemann et collègues. Pourquoi jeter le doute sur la pertinence de ce type de travaux de psychologie pour la question qui nous intéresse ? En quoi me situerais-je « *en dehors de (mon) territoire propre* », comme il l'affirme, du fait que j'utilise et que je produis par mes travaux de recherche ce genre de résultats ? Disposant de la double formation de mathématicien et de psychologue cognitiviste, je peux assurer que j'y vois plus de complémentarité que d'opposition.

8°) Il me semble que lorsque Michel Delord fait appel à la "non-commutativité" des « *diverses formes de multiplications .../... en tant qu'opérations de produit tensoriel sur des espaces vectoriels différents* », il obscurcit ce que les réformateurs de 1970 avaient, certes de manière imparfaite, tenté d'éclaircir : les rapports qu'entretiennent les modèles mathématiques et la réalité et la façon dont le langage quotidien peut être un médiateur entre ces deux "univers". Il semble considérer qu'aujourd'hui, du fait que les maîtres n'écrivent pas $50 \text{ €} \times 3 = 150 \text{ €}$, ils ne se livrent

à aucune analyse dimensionnelle : or, comme je l'ai signalé plus haut, ils peuvent le faire à l'oral et c'est ce qui se passe dans de nombreuses classes.

9°) En conclusion, beaucoup de points peuvent être débattus, mais Michel Delord et, au-delà, ses collègues du GRIP, doivent comprendre qu'il deviendrait difficile de débattre avec eux s'ils continuaient à exclure *a priori* les résultats des recherches scientifiques en psychologie cognitive et en didactique des mathématiques. Par ailleurs, il ne suffit pas de s'intéresser au contenu des textes officiels car les pratiques des maîtres ne leur correspondent pas toujours. Les décalages entre les uns et les autres sont des phénomènes particulièrement intéressants parce qu'ils peuvent être révélateurs de prises de position fondées sur une pratique de classe (il ne s'agit évidemment pas de se focaliser sur les pratiques pédagogiques de tel ou tel « maître rebelle »). De même, il convient de prendre en compte ce que les inspecteurs, dont c'est le métier, font « remonter » de leurs observations des classes et de la façon dont ils les situent par rapport aux programmes. Finalement, c'est bien en s'appuyant sur ce triptyque : analyse raisonnée des pratiques des maîtres dans leur histoire, considérations épistémologiques sur les savoirs mathématiques à enseigner et recherches en psychologie cognitive sur les apprentissages mathématiques, qu'on a quelque chance de favoriser une évolution positive des programmes et de l'enseignement des mathématiques.