PROGRAMME ET ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES À L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE

1970

Vol. VI : 514-6

Arrêté du 2 janvier 1970

(Pédagogie, Enseignements scolaires et Orientation : bureau ES 1)
(Vu A. 17-10-1945, mod. p. A. 23-11-1956 ; A. 7-8-1969)

Objet :

Programme de mathématiques de l'enseignement élémentaire.

ARTICLE PREMIER. — A compter de la rentrée scolaire 1970, l'enseignement des mathématiques dans les classes élémentaires sera donné conformément au programme annexé au présent arrêté.

ART. 2. — Le directeur de la Pédagogie, des Enseignements scolaires et de l'Orientation est chargé de l'exécution du présent arrêté.

Pour le ministre et par délégation :
Le directeur du Cabinet,
André GIRAUD.

(J.O. *du* 6 *janvier* 1970)

ANNEXE
Programme (1945 modifié 1970)

Cours préparatoire
Activités de classement et de rangement.
Notion de nombre naturel.
Nommer et écrire des nombres.
Comparer deux nombres.
Somme de deux nombres.

Cours élémentaire : 1^re^ et 2^e^ année
1 - *Éléments de mathématique*
  Les nombres naturels : nom et écriture.
  Somme et différence de deux nombres ; pratique de l'addition et de la soustraction.
  Produit de deux nombres ; pratique de la multiplication.
  Quotient exact.
  Division avec reste : quotient entier.
  Pratique de la division par un nombre d'un chiffre.
  Calcul mental.
2 - *Exercices d'observation et travaux sur des objets géométriques*
  Tracés, découpages, pliages.
  Cube, carré, rectangle, triangle.
  Quadrillages.
3 - *Exercices pratiques de mesure et de repérage*
  Usage de la règle graduée, de la balance, du calendrier. Lecture de l'heure...

Cours moyen : 1^re^ et 2^e^ année
1 - *Éléments de mathématique*
  Nombres naturels et décimaux : nom et écriture.
  Multiplication et division par 10, 100, 1000...
  Opérations et leurs propriétés ; suite d'opérations ; pratique des opérations ; preuve par 9 des opérations ; calcul mental.
  Divisibilité des nombres naturels par 2, 5, 9 et 3.
  Exemples de relations numériques. Proportionnalité.
  Fractions. Produit de deux fractions.
2 - *Exercices d'observation et travaux sur des objets géométriques*
  Bande, parallélogramme (et ses cas particuliers), triangle.
  Disque, cercle.
  Pavé (parallélépipède).
3 - *Mesures : exercices pratiques*
  Longueur, aire, volume.
  Temps, masse.
  Expression d'un résultat avec une unité convenablement choisie.
  Ordre de grandeur. Encadrement.

Vol. VI : 514-6

Circulaire n° IV 70-2 du 2 janvier 1970

(Pédagogie, Enseignements scolaires et Orientation : bureau ES 1)
aux Recteurs, aux Inspecteurs d'académie,
aux Inspecteurs départementaux de l'Éducation nationale

Objet :

Enseignement des mathématiques à l'école élémentaire.

I. - Considérations générales

L'enseignement mathématique à l'école élémentaire veut répondre désormais aux impératifs qui découlent d'une scolarité obligatoire prolongée et de l'évolution contemporaine de la pensée mathématique.

Il s'agit dès lors de faire en sorte que cet enseignement contribue efficacement au meilleur développement intellectuel de tous les enfants de six à onze ans afin qu'ils entrent dans le second degré avec les meilleures chances de succès.

L'ambition d'un tel enseignement n'est donc plus essentiellement de préparer les élèves à la vie active et professionnelle en leur faisant acquérir des techniques de résolution de problèmes catalogués et suggérés par “la vie courante”, mais bien de leur assurer une approche correcte et une compréhension réelle des notions mathématiques liées à ces techniques.

Il semble que cela soit possible si, dès le début de la scolarité, le souci majeur du maître est de donner à ses élèves une formation mathématique véritable qui leur permette, d'une manière adaptée à leur âge, à partir de l'observation et de l'analyse de situations qui leur sont familières, de dégager des concepts mathématiques, de les reconnaître et de les utiliser dans des situations variées, de s'assurer ainsi la maîtrise d'une pensée mathématique disponible et féconde.

Les connaissances mathématiques ainsi construites peu à peu se prolongent sans heurt au-delà de l'école élémentaire, mais à ce niveau déjà, les enfants pourront se rendre compte que l'univers mathématique n'est pas clos sur lui-même et mesurer le pouvoir que leur donne l'outil mathématique sur l'univers réel.

Par ailleurs, les progrès dans la connaissance du développement psychologique, de l'enfant montrent tout le bénéfice qu'il peut retirer d'un tel enseignement pour l'ensemble de sa formation.

Des expériences nombreuses, réalisées en France et à l'étranger, permettent dès maintenant l'élaboration d'un programme adapté à un enseignement rénové et accessible aux élèves. Mais la mise en œuvre d'un tel enseignement suppose que tous les maîtres aient pu y être préparés et demande, de ce fait, un certain délai. En attendant qu'une information suffisante soit donnée aux maîtres et qu'un programme entièrement rénové puisse être enseigné correctement dans nos écoles, il a paru indispensable de prendre des mesures provisoires partielles et sans doute modestes mais immédiatement applicables : alléger le programme actuel, en donner une rédaction différente qui réponde mieux aux finalités actuelles de l'école élémentaire, l'accompagner de commentaires qui, sans introduire pratiquement de terminologie nouvelle, annoncent et préparent une rénovation plus profonde et plus satisfaisante.

Dans la rédaction du programme les trois niveaux : cours préparatoire, cours élémentaire (en deux ans), cours moyen (en deux ans), sont conservés.

Pour chacun de ces niveaux les notions numériques qui constituent l'essentiel du programme sont présentées dans le paragraphe 1. Les paragraphes suivants proposent des thèmes d'activités plus divers : le paragraphe 2 concerne l'observation de l'espace et des objets géométriques, le paragraphe 3 la notion de mesure dans une perspective expérimentale. La matière de ces deux derniers paragraphes sera donc largement empruntée aux activités d'éveil.

Les activités désignées jusqu'alors sous le vocable de “calcul” restent bien entendu essentielles mais, comme elles ne constituent désormais qu'une partie de l'activité mathématique des enfants, il convient de désigner la matière du programme par le terme “Mathématique”.

Il est permis d'espérer que la nouvelle rédaction du programme et l'allégement substantiel de celui-ci inviteront les maîtres à réfléchir sur le contenu mathématique de leur enseignement. Ils y seront aidés par les commentaires.

Ceux-ci ne sauraient être considérés comme un cours de mathématiques. Ils s'adressent aux maîtres et se proposent seulement de les éclairer sur l'esprit dans lequel il est actuellement souhaitable d'enseigner les mathématiques à l'école primaire. Ils ne traitent pas également de toutes les questions. Ils ont été particulièrement détaillés à propos de celles dont la présentation est à renouveler.

Pour faciliter leur étude, ces commentaires ont été rédigés non par niveau, mais par thème du programme. Ils se substituent aux instructions de 1945, actuellement en vigueur.

En dépit de son désir d'être une approche, la plus correcte et la plus précise possible, de quelques concepts fondamentaux, abstraits par nature, l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire demeure résolument concret.

S'il s'agit par exemple d'acquérir la notion de nombre naturel l'enfant sera appelé à manipuler effectivement et individuellement des collections d'objets distincts. Les manipulations porteront sur des collections diverses différant les unes des autres par la nature des objets, leur forme, leur couleur, leur disposition, etc. Elles seront nombreuses et variées non pour créer des automatismes mais pour que leur variété permette à l'élève, en exerçant sa réflexion sur ce qu'il fait, de reconnaître des analogies en dépit des différences, de dégager peu à peu d'une manière d'abord intuitive et confuse puis de plus en plus consciente et claire, une notion abstraite et générale, celle de nombre naturel.

C'est par des démarches de cette nature, faites d'actions et de réflexion, que l'enfant contribuera à construire son propre savoir et connaîtra la joie de découvrir et de créer.

II. - Commentaires du programme

1re partie. - Nombres et opérations.

L'ordre dans lequel les rubriques sont énumérées ci-dessous n'est pas nécessairement l'ordre chronologique de leur présentation dans les classes. Il appartiendra à chaque maître d'organiser sa progression selon les possibilités des élèves et ses préférences personnelles.

1. Notion de nombre naturel.
2. Nommer et écrire les nombres.
3. Comparer deux nombres.
4. Opérations - Propriétés - Pratique.
5. Relations numériques : tableaux de nombres, opérateurs numériques.
6. Fractions comme opérateurs.
7. Décimaux.
8. Problèmes.

2e partie. - Exercices d'observation et travaux sur des objets géométriques.

3e partie. - Mesures : exercices pratiques.

1re partie
Nombres et opérations

1. - Notion de nombre naturel

Le programme du cours préparatoire a été réduit aux points suivants :
- élaboration du concept de nombre naturel ;
- comparaison de deux nombres naturels ;
- initiation à la numération ;
- addition des nombres naturels.

C'est par des manipulations nombreuses d'ensembles d'objets que les enfants élaborent peu à peu la notion de nombre naturel. Il est essentiel de bien comprendre que le nombre naturel n'est ni un objet, ni une propriété attachée à des objets, mais une propriété attachée à des ensembles.

Pour dégager la notion de couleur, qui est une propriété d'objets, on pratique des exercices de classement portant sur des objets variés dont la forme, la matière, la taille... sont différentes, afin de répartir ces objets selon leur couleur.

De telles activités de classement pratiquées dès l'école maternelle devront être reprises dans les premières semaines du cours préparatoire (les propriétés étant ou non des propriétés d'ordre sensoriel).

La notion de nombre naturel comme propriété d'un ensemble apparaîtra dans la mesure où l'on pourra établir une mise en correspondance terme à terme entre ensembles. La possibilité d'établir une telle correspondance est indépendante de la nature et de la disposition des objets qui constituent les ensembles.

Exemples

1. Si on peut mettre en correspondance un à un les enfants de la classe et les portemanteaux, on conclut qu'il y a *autant* d'enfants *que* de portemanteaux et *autant* de portemanteaux *que* d'enfants.
2. Deux enfants étalent sur leur table le contenu de leur trousse. Si l'on peut mettre en correspondance un à un les objets d'une trousse, et ceux de l'autre (sans s'occuper ni de leur nature ni de leur disposition) on peut conclure qu'il y a *autant* d'objets dans l'une des trousses *que* dans l'autre.

C'est quand on aura multiplié ces exercices que les enfants comprendront que le nombre est une propriété qui s'attache à des ensembles et ceci par une démarche analogue à celle qui leur a permis de comprendre que la couleur, par exemple, est une propriété qui s'attache à des objets.

L'emploi systématique de la correspondance terme à terme permet de classer des ensembles et d'attribuer à chaque classe un nombre : ainsi, la classe de tous les ensembles qui ont autant d'objets que l'on a de doigts dans une main définit le *nombre naturel "cinq".*

Cinq doigts, cinq enfants, cinq fruits, etc. ne sont pas des nombres. Le nombre cinq est une propriété *commune* à l'ensemble des doigts d'une main, à un groupe d'enfants, au contenu d'une coupe de fruits.

Dans le premier exemple, si la correspondance un à un est impossible, il y a plus de portemanteaux que d'enfants ou plus d'enfants que de portemanteaux. On insistera sur le sens des expressions : *autant que, plus que, moins que.*

Il convient de souligner l'importance, pour l'élaboration de la notion de nombre naturel, des activités de classement, de rangement, de mise en correspondance terme à terme réalisées à l'école maternelle.

Un travail, dans l'esprit des exemples 1 et 2, peut déjà être fait avec profit en dernière année d'école maternelle, mais il serait prématuré, à ce niveau, de se fixer pour but, de manière systématique et générale, l'apprentissage des nombres naturels.

2. - Nommer et écrire les nombres

Chaque nombre naturel a un nom et peut être représenté par un signe. Nommer et écrire un nombre naturel avec un nombre limité de signes constitue ce que l'on désigne par le terme *"numération".*

L'activité de base est le groupement des objets d'un ensemble selon un certain mode. Une telle activité s'impose d'elle-même dès que les ensembles ont "beaucoup" d'objets.

2.1. - *Exemples de jeux de groupements préalables à la numération*

1^er^ *jeu :* On groupe les enfants d'une classe quatre par quatre. On obtient :
- six groupes de quatre enfants
- trois enfants non groupés

2^e^ jeu : On répète l'opération de groupement avec les groupes de quatre enfants ; la répartition est alors :
- un "grand groupe" formé de quatre groupes de quatre enfants chacun
- deux groupes de quatre enfants
- trois enfants non groupés

2.2. - *Notation*

Les résultats du *2^e^* jeu peuvent être consignés dans un tableau :

Grands groupes	Groupes	Enfants non groupés
1	2	3

Avec ce mode de groupement, le nombre des enfants s'écrit : 123 et se lit : "un, deux, trois".

On peut faire des exercices analogues en groupant par trois, par cinq, par dix, par douze...

Inversement, connaissant la règle du jeu (le mode de groupement) et le tableau obtenu, on peut se proposer de retrouver la situation initiale.

Si dans les jeux précédents on choisit de grouper les enfants par dix, on obtient la numération décimale : les "groupes" sont des dizaines, les "grands groupes" des centaines, etc...

Ainsi dans l'exemple précédent, le tableau devient :

Groupes	Enfants non groupés
2	7

C'est à la numération décimale seule que correspond la *numération orale* habituelle : dans cet exemple 27 est lu "vingt-sept".

Au cours de ces exercices, on peut rencontrer des ensembles ne comprenant aucun objet. Leur propriété numérique est zéro (0). Zéro est un nombre naturel.

Il paraît raisonnable de ne pas dépasser cent au cours préparatoire et dix mille au cours élémentaire pour l'apprentissage de la numération orale.

3. - Comparer deux nombres

3.1. - *Emploi du signe "="*

D'une façon générale, lorsque l'on écrit

$$a = b$$

c'est que les symboles a et b *désignent le même objet.*

En particulier un nombre peut s'exprimer de différentes façons :
Exemples : 6 ; 2 X 3 ; 4 + 2 ; 8 - 2 ; 24 : 4 sont des désignations du même nombre.

Cela donne le droit d'écrire :

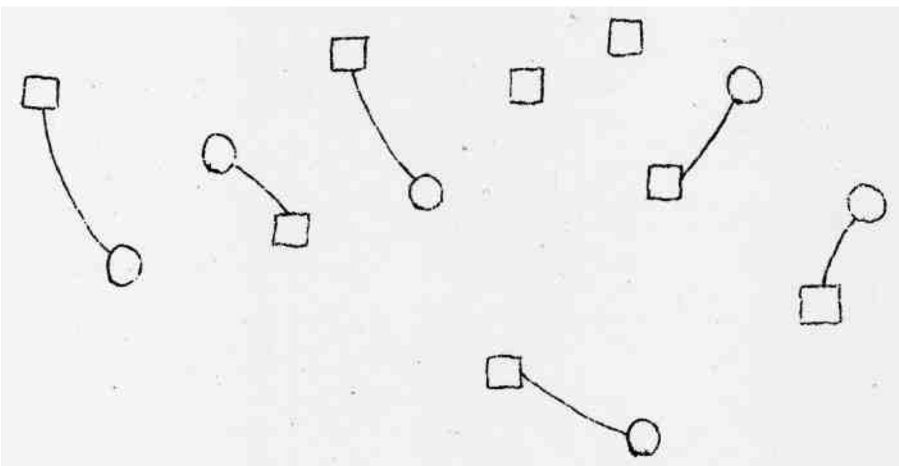
$$6 = 6$$
$$6 = 2 \times 3$$
$$2 \times 3 = 4 + 2 \qquad \text{etc.}$$

3.2 - *Emploi des signes ≠, >, <*

3.2.1. - Le signe ≠ se lit "n'est pas égal à"

La barre transversale indique très intuitivement la négation de l'égalité.
Ainsi $6 \neq 8$
$6 + 7 \neq 3 + 8$ etc.

3.2.2. - Les signes de comparaison >, < peuvent être introduits dès le cours préparatoire : à partir de la correspondance terme à terme. Ils sont liés aux comparatifs "plus que", "moins que" et interviennent naturellement lorsque les enfants reconnaissent le nombre comme une propriété d'un ensemble.
Exemple : des objets carrés et des objets ronds sont disposés sur la table. Comparer le nombre des objets carrés au nombre des objets ronds.



L'impossibilité d'épuiser les objets carrés en faisant correspondre à chaque objet rond un seul objet carré permet de conclure, *sans dénombrer les objets,* que le nombre des ronds est plus petit que le nombre des carrés ou que le nombre des objets carrés est plus grand que le nombre des objets ronds. En désignant par R le nombre des objets ronds et par C le nombre des objets carrés, on écrit :

$$R < C \quad \text{ou} \quad C > R$$

Les relations "avoir moins d'éléments que", "avoir plus d'éléments que" permettent de ranger des ensembles et d'ordonner les nombres correspondants.
Les relations permettant soit de répartir en classes, soit d'ordonner sont essentielles. On en étudiera de nombreux exemples tout au long de la scolarité.

4. - Opérations. Propriétés. Pratique

L'étude des nombres naturels comprend celle des deux opérations fondamentales, l'addition et la multiplication, qui donnent à l'ensemble de ces nombres sa structure algébrique propre.

A ces deux opérations se rattachent la soustraction, la division exacte et la division euclidienne (c'est-à-dire avec reste pouvant être différent de zéro).

Il est essentiel de comprendre que l'addition, la multiplication ne portent que sur des nombres. Il est tout aussi important que les enfants reconnaissent les situations auxquelles correspondent ces opérations.

4.1. - *Addition - Soustraction*

4.1.1. - *L'addition*

Exemple : Soient les nombres 8 et 7
Prenons un premier ensemble de 8 objets, puis un second ensemble de 7 objets, tous distincts des précédents. La réunion de ces deux ensembles, quelle que soit la nature des objets, est un ensemble de 15 objets.
On dit que le nombre 15 est la *somme* des nombres 8 et 7, ce qui s'écrit, en utilisant le signe + (plus) :

$$8 + 7 = 15$$

L'addition est l'opération qui associe aux nombres 8 et 7 leur somme 15. L'égalité $8 + 7 = 15$ signifie que $8 + 7$ et 15 désignent le même nombre.
Pour souligner que $8 + 7$ représente un nombre on pourra l'écrire $(8 + 7)$; de ce point de vue, et pour éviter des confusions, les parenthèses sont souvent utiles. On pourra en faire usage dès l'école élémentaire.
Rappelons que l'addition (comme la soustraction, la multiplication...) porte sur les nombres et non sur les ensembles que ces nombres qualifient : on réunit des ensembles d'objets ; on additionne des nombres.
Les phrases telles que :

8 pommes + 7 pommes = 15 pommes.

n'appartiennent en fait, ni au langage mathématique, ni au langage usuel.
Le langage courant utilise, en effet, des phrases telles que "lorsque *j'ajoute* 8 pommes aux 7 pommes qui sont dans la corbeille, la corbeille contient 15 pommes" ou même de façon plus vague "8 pommes *et* 7 pommes, cela fait 15 pommes".
Ajouter, et sont des mots du langage courant, ce ne sont pas des mots du langage mathématique.
A l'inverse, le mot "*plus*" n'est pas habituellement employé dans le langage courant pour exprimer l'action d'ajouter.
Dans la pratique de la classe, les deux langages sont mêlés mais il importe de les distinguer.
On pourra écrire, par exemple :
Le nombre de pommes est :

$$8 + 7 = 15$$

et conclure : "la corbeille contient 15 pommes".

L'expérience montre que le nombre de pommes est aussi (7 + 8).
Aux couples (8 ; 7) et (7 ; 8) l'addition associe le même nombre. L'addition est *commutative.*
Remarquons que : 8 + 0 = 8 ; 0 + 8 = 8 ; 4 + 0 = 4 ; 0 + 0 = 0 etc.

4.1.2. - *La soustraction*

Exemple : Parmi 15 fruits, 8 fruits seulement sont des pommes.
Le nombre des fruits qui ne sont pas des pommes est alors celui qui complète l'égalité

$$8 + . = 15 \quad \text{ou} \quad . + 8 = 15$$

On cherche parmi les nombres (8 + 0), (8 + 1),... celui qui est égal à 15. Le nombre cherché est (8 + 7). Le nombre qui doit remplacer le point est donc 7. On dit que 7 est la différence des nombres 15 et 8 et on écrit, en utilisant le signe - (moins) :

$$15 - 8 = 7$$

La soustraction est l'opération qui associe aux nombres 15 et 8 leur *différence* (15 - 8) (ou encore 7). D'une manière générale, la soustraction associe aux nombres naturels a et b leur différence (a - b) qui existe seulement si a > b ou si a = b.
Le fait que les égalités

$$8 + 7 = 15 \quad \text{et} \quad 15 - 8 = 7$$

ont même signification est difficilement compris par les enfants du cours préparatoire. Aussi paraît-il indiqué de n'introduire la soustraction, avec son signe, qu'au cours élémentaire. Au cours préparatoire, il suffit que les élèves connaissent correctement l'addition.
Par ailleurs, avant d'expliciter une notion nouvelle, il est indiqué d'en faire des approches successives. Dans cet esprit, dès le cours préparatoire, on étudiera de nombreuses situations décrites par une relation de la forme

$$b + \square = \square + b = a$$

4.2. - *Multiplication - Division exacte*

4.2.1. - *La multiplication*

Exemple : Des objets sont disposés en lignes et colonnes de la façon suivante :

+ + + + + + + +
+ + + + + + + +
+ + + + + + + +
+ + + + + + + +
+ + + + + + + +

On peut répartir ces objets en 5 ensembles de 8 objets.
Le nombre des objets est (8 + 8 + 8 + 8 + 8) qu'on écrit selon une convention généralement adoptée (8 x 5).
Le nombre des objets est (5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5) que l'on écrit avec la même convention (5 x 8) Ceci justifie l'égalité (8 X 5) = (5 X 8).
On peut écrire indifféremment (8 x 5) ou (5 x 8) puisque ces écritures désignent le même nombre. On l'appelle *produit* des deux nombres donnés.
La *multiplication* est l'opération qui associe à deux nombres leur produit. Aux couples

$$(8 ; 5) \text{ et } (5 ; 8)$$

la multiplication fait correspondre le nombre 40.

$$(8 \times 5) = (5 \times 8) = 40$$

La multiplication est *commutative.* Les deux nombres 8 et 5 jouent le même rôle.
Cas particulier : l'un des nombres est 1 ou 0 :

$$4 \times 1 = 1 \times 4 = 4 \; ; \qquad 3 \times 1 = 1 \times 3 = 3 \; ; \qquad \text{etc.}$$
$$4 \times 0 = 0 \times 4 = 0 \; ; \qquad 3 \times 0 = 0 \times 3 = 0 \; ; \qquad \text{etc.}$$

4.2.2. - *Division exacte*

Exemple : On a obtenu un ensemble de 56 objets en réunissant 7 ensembles qui comprennent chacun le même nombre d'objets.
Il est naturel de désigner ce nombre par un signe (., □ ou une lettre quelconque) et d'écrire une égalité entre les deux expressions du nombre de tous les objets.

56 = 7 x □ ou 56 = □ x 7 (commutativité de la multiplication)

□ représente un nombre que l'on peut désigner directement par l'expression (56 : 7).
La division exacte est l'opération qui associe aux nombres 56 et 7 leur *quotient exact*

(56 : 7)

Ce nombre s'écrit 8 ; d'où l'égalité (56 : 7) = 8 que l'on écrit plus simplement 56 : 7 = 8
Les égalités : 56 = 7 x □
56 = □ x 7
□ = 56 : 7
ont la même signification.
□ représente un nombre naturel parce que 56 est un multiple de 7.
D'une façon générale, le quotient exact de deux nombres naturels n'existe que si le premier est multiple du deuxième. Il ne faut donc désigner un quotient à l'aide du signe ":" que lorsque l'on sait que le quotient exact existe.
Toute situation qui peut se décrire par une des deux égalités
a x □ = b
ou □ x a = b
est une situation de division
Si b est un multiple de a on écrit □ = b : a

4.3. - *Tables*

Aux tables traditionnelles, on préférera des tables de Pythagore construites par les élèves avec des nombres divers (sans oublier les lignes et colonnes qui comprennent 0 et 1).

exemples

+	2	5	8	4
7	9	12	15	11
0	2	5	8	4
6	8	11	14	10
3	5	8	11	7

x	0	7	2	5	3
6	0	42	12	30	18
1	0	7	2	5	3
4	0	28	8	20	12
3	0	21	6	15	9

La construction de telles tables facilite l'apprentissage et la mémorisation de sommes et de produits indispensables au calcul. On construira notamment les tables d'addition et de multiplication dans lesquelles les nombres placés en ligne et colonne sont ordonnés de 0 à 9.

4.4. - *Division euclidienne* (avec reste, ce reste pouvant être nul)

Exemple : On veut distribuer équitablement 17 cerises entre 3 enfants.
Formons la suite des produits (3 x 1) ; (3 x 2) ; (3 x 3), etc.
Aucun de ces nombres n'est égal à 17 donc il est impossible de servir équitablement les enfants en utilisant toutes les cerises.
On constate que

$$(3 \times 5) < 17 < (3 \times 6)$$

et aussi que $17 = (3 \times 5) + 2$

Le plus grand nombre de cerises que l'on puisse donner à chaque enfant est 5 ; 2 cerises ne sont pas distribuées.
La division euclidienne de 17 par 3 fait correspondre au couple de nombres (17 ; 3) le couple (5 ; 2)
5 est le *quotient entier* de 17 par 3
2 est le *reste* de la division euclidienne de 17 par 3 ; il est inférieur au diviseur 3.

Remarque :
La notation : est réservée *exclusivement* au cas où le *quotient entier* de la division euclidienne est aussi quotient exact c'est-à-dire au cas où le reste est nul.
On écrira donc :

$$c = a : b \quad \text{si et seulement} \quad \text{si} \quad a = b \times c$$

Dans l'exemple précédent, où le reste n'est pas nul, on pourra écrire simplement : “la division de 17 par 3 donne 5 pour quotient et 2 pour reste,

$$17 = (5 \times 3) + 2$$

chaque enfant recevra 3 cerises”.
L'égalité ci-dessus dispense de préciser que la division est euclidienne et le quotient entier.

4.5. - *Suites d'opérations*

4.5.1. - *Additions successives*

Exemple : A partir des nombres 8, 7, 5, on calcule :
(8 + 7) on obtient 15
puis ((8 + 7) + 5) c'est-à-dire (15 + 5)
On constate que ce nombre peut être obtenu par un autre mode de calcul sans que soit modifié l'ordre des nombres donnés (8, 7, 5)
On peut, en effet, calculer (7 + 5) on obtient 12 puis [8 + (7 + 5)] c'est-à-dire (8 +12)
Les expressions [8 + (7 + 5)] et [(8 + 7) + 5] désignent le même nombre. On convient de supprimer les parenthèses et d'écrire ce nombre 8 + 7 + 5 On l'appelle la somme des trois nombres. Cet exemple illustre une propriété de l'addition : *l'associativité.*

4.5.2. - *Multiplications successives*

Exemple : à partir des nombres 5, 6, 4,

On calcule	(5 x 6)	puis	[(5 x 6) x 4]	c'est-à-dire (30 x 4)
ou bien	(6 x 4)	puis	[5 x (6 x 4)]	c'est-à-dire (5 x 24)

On constate que les deux expressions ((5 x 6) x 4) et (5 x (6 x 4)) désignent le même nombre.
On convient de supprimer les parenthèses et d'écrire ce nombre 5 x 6 x 4
On l'appelle produit des trois nombres.
Cet exemple illustre le fait que la multiplication est *associative.*
Remarque : En effectuant des soustractions successives on vérifie que la soustraction n'est pas associative. 7 — (5 — 2) * (7 — 5) — 2 On ne peut donc pas supprimer les parenthèses. Il en est de même de la division exacte.

4.5.3. - *Addition et multiplication*

Exemple : Calculer (2 + 5) puis [(2 + 5) X 3)] c'est-à-dire (7 x 3)
Peut-on obtenir le même résultat d'une autre façon ?
On constate que ce nombre est le même que la somme
[(2 x 3) + (5 x 3)] c'est-à-dire 6 + 15
Cet exemple illustre une nouvelle propriété : la multiplication est *distributive* par rapport à l'addition.
Le fait de pouvoir désigner et calculer un nombre de plusieurs façons différentes est une conséquence des propriétés essentielles de l'addition et de la multiplication que nous venons de signaler : commutativité et associativité de l'addition et de la multiplication, distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.
Il n'est nullement question de nommer de telles propriétés au niveau élémentaire. Mais il est important de faire en sorte que les enfants les utilisent de façon naturelle et familière, parce qu'elles sont à l'origine de tous les modes de calcul : calcul mental et techniques usuelles.

4.6. - *Techniques opératoires*

Il est essentiel, et cela à tous les niveaux, que les élèves calculent mentalement et par écrit avec aisance et sûreté.

Les techniques usuelles concernant les opérations doivent être parfaitement connues. Elles seront d'autant mieux acquises que les enfants, au lieu de les apprendre de façon purement mécanique, les auront découvertes par eux-mêmes comme synthèses d'expériences effectivement réalisées, nombreuses et variées.

Les élèves seront entraînés à la pratique du calcul mental au cours duquel on s'attachera à mettre en œuvre les propriétés fondamentales des opérations (associativité, commutativité, distributivité) et leurs conséquences simples : additionner ou soustraire une somme ou une différence, multiplier une somme ou une différence par un nombre.

La valeur éducative des exercices de calcul mental réside tout autant dans la manière de conduire le calcul que dans sa rapidité.

5. - Relations numériques

5.1. - *Opérateurs, tableaux de nombres*

Exemple 1 : On se donne une liste de nombres naturels

3, 9, 14, 25, 17

A chacun de ces nombres on additionne 4
On construit ainsi une deuxième liste de nombres déduits de la première

7, 13, 18, 29, 21

On peut disposer ces deux listes en utilisant un tableau mettant en évidence la correspondance terme à terme

+ 4

3	9	14	25	17
7	13	18	29	21

- 4

La correspondance qui associe les nombres d'une liste à ceux de l'autre est une *relation numérique.*
L'opérateur "additionner 4" qui, à chaque nombre de la première liste, fait correspondre un nombre de la seconde, peut être représenté par exemple par

$$\xrightarrow{\quad + \, 4 \quad}$$

L'opérateur "soustraire 4" qui, à chaque nombre de la seconde liste fait correspondre un nombre de la première, peut être représenté par

$$\xrightarrow{\quad - \, 4 \quad}$$

Cas particulier : "additionner 1" — "soustraire 1"

+ 1

4	0	1	7	2	9
5	1	2	8	3	10

- 1

A chacun des nombres de la 1re liste, l'opérateur "additionner 1" fait correspondre son *successeur* dans la suite des nombres naturels (0, 1, 2, 3, 4...)
A chacun des nombres de la 2e liste, l'opérateur "soustraire 1" fait correspondre son *prédécesseur* dans la suite des nombres naturels.
On peut utiliser d'autres opérateurs tels que :

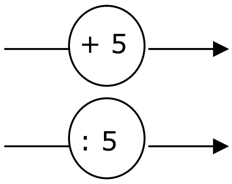
"multiplier par a"
"diviser par b" (division exacte, quand elle est possible)

que l'on peut symboliser par

$$\xrightarrow{\quad \times \, a \quad}$$

$$\xrightarrow{\quad : \, b \quad}$$

Exemple 2 : On se donne les opérateurs



et deux listes incomplètes en correspondance, on cherche à compléter ces listes.

x 5

7	12		100	
		42		65

: 5

On s'aperçoit qu'aucun nombre ne correspond à 42 (42 n'est pas multiple de 5).

Exemple 3 : Connaissant un couple d'éléments correspondants, trouver les opérateurs de l'un des quatre types précédents (additionner .... ; soustraire .... ; multiplier par .... ; diviser par ....) qui font passer de la première liste à la seconde

7	5	4	
14			8

(deux opérateurs possibles : additionner 7 ; multiplier par 2)

Exemple 4 : Connaissant deux couples de nombres de deux listes correspondantes trouver les opérateurs de l'un des 4 types précédents qui font passer d'une liste à l'autre.

7	5	4	
14	10		8

un seul opérateur convient : « multiplier par 2 ».

5.2. - *Utilisation de tableaux de nombres en correspondance*

pour l'étude de situations concrètes.

Lorsque l'opérateur est "multiplier par ..." où "diviser par ..." la correspondance qui permet de passer d'une liste à l'autre est la *proportionnalité.*

La plupart des problèmes traités au cours moyen mettent en œuvre des thèmes dans lesquels la proportionnalité doit être explicitée.

D'une façon générale, tous les problèmes traités au moyen de la "règle de trois" relèvent du modèle mathématique précédent. Il est essentiel de savoir qu'il s'agit d'un seul et même problème, qu'il convient d'expliquer en termes nouveaux.

Exemple 1 : Pour une fête, des enfants font des colliers composés tous du même nombre de perles.

Colliers	Perles
3	45
7	.
.	135

Un enfant a utilisé 45 perles pour faire 3 colliers.
Le tableau ci-contre permet de répondre aux deux questions :
- Combien faut-il de perles pour fabriquer 7 colliers ?
- Combien de colliers peut-on fabriquer avec 135 perles ?

Des expériences et des manipulations préalables ayant montré dès le cours élémentaire que cette situation est multiplicative, il suffit :
1/ de chercher l'opérateur qui fait passer de la première à la deuxième colonne "multiplier par 15" ;
2/ de calculer 7 x 15 ;
3/ de calculer 135 : 15 ;

Exemple 2 : 5 cm sur une carte représentant 10 km sur le terrain
- à quelle distance sur le terrain correspond une distance de 18 cm sur la carte ?
- à quelle distance correspond sur la carte une distance de 32 km sur le terrain ?

Le tableau suivant permet de répondre aux questions

Distance sur la carte, unité : cm	5	18	.
Distance sur le terrain, unité : km	10	.	32

Des expériences préalables doivent montrer que les distances sur le terrain et sur la carte sont proportionnelles.
Dans l'exemple étudié, l'opérateur qui fait passer de 5 à 10 est donc "multiplier par 2".
Le correspondant de 18 dans la deuxième ligne est (18 x 2) c'est-à-dire 36.
Celui de 32 est (32 : 2) c'est-à-dire 16.
On peut donner maintenant les réponses en langage courant : 18 cm sur la carte représentent 36 km sur le terrain ; 32 km sur le terrain sont représentés par 16 cm sur la carte.

Exemple 3 : On considère une série de rectangles dont l'un des côtés, une unité étant choisie, est mesuré par le nombre 4.
Un quadrillage permet de déterminer les aires de ces rectangles en prenant comme unité d'aire le carré de côté 1. (cf. III, mesure)

Longueur du 2e côté	Aire
2 3 5 4 . .	8 . . . 24 36
a	4 a

Nous pouvons construire le tableau de correspondance entre la mesure du deuxième côté et l'aire de ces rectangles.
De façon générale, si la mesure du deuxième côté est a, l'aire (l'unité étant déterminée comme plus haut) est 4 a.

Remarques : Nous pouvons constater à partir de tableaux analogues aux précédents les propriétés suivantes :

Propriété 1.

Exemple 1

x 15

3	45
6	90
9	135

Exemple 2

x 4

2	8
3	12
5	20

Remarquons que

dans le 1^er^ tableau 3 + 6 = 9 ; 45 + 90= 135

dans le 2^e^ tableau 2 + 3 = 5 ; 8 + 12 = 20

De façon générale, à la somme de deux nombres de la première colonne correspond la somme des nombres associés de la deuxième colonne.
Ceci peut être représenté par le tableau :

x a

x	(x X a)
y	(y X a)
x + y	(x X a) + (y X a)

Propriété 2.

Exemple 1

x 15

3	45
9	135

9 et 135 peuvent être obtenus en multipliant respectivement 3 et 45 par 3.

Exemple 2

x 4

3	12
6	24

6 et 24 peuvent être obtenus en multipliant respectivement 3 et 12 par 2.

Ceci peut être représenté de façon générale par le tableau suivant :

$\xrightarrow{\times a}$

m	(m X a)
(m X b)	(m X b) X a

Au produit par b d'un nombre quelconque m de la 1re colonne correspond le produit par b du nombre de la 2e colonne associé à m.

5.3. - *Chaînes d'opérateurs "additionner...", "soustraire..."*

Exemple 1.

$\xrightarrow{+5}$ $\xrightarrow{+2}$

4	9	11
7	12	14
9	14	16

On constate que l'on peut passer directement de la première à la troisième colonne en additionnant 7 à chacun des nombres de la première colonne.
On peut donc remplacer la chaîne des opérateurs :

$\xrightarrow{+5}$ $\xrightarrow{+2}$ par l'opérateur $\xrightarrow{+7}$

Exemple 2.

$\xrightarrow{-2}$ $\xrightarrow{-3}$

8	6	3
5	3	0
4	2	////
2	0	////

On constate que l'on peut passer directement de la première à la troisième colonne en soustrayant 5 de chacun des nombres de la première colonne (ce qui n'est possible que si ces nombres sont égaux ou supérieurs à 5).

On peut donc remplacer la chaîne des opérateurs :

$\xrightarrow{-2}$ $\xrightarrow{-3}$ par l'opérateur $\xrightarrow{-5}$

Exemple 3.

$\xrightarrow{+3}$ $\xrightarrow{-5}$

5	8	3
8	11	6
2	5	0
1	4	////

$\xrightarrow{-2}$

On peut passer directement de la première à la troisième colonne en soustrayant 2 (quand c'est possible).

Exemple 4.

$\xrightarrow{+4}$ $\xrightarrow{-3}$

5	9	6
8	12	9
2	6	3

$\xrightarrow{+1}$

On peut passer directement de la première colonne à la troisième colonne en additionnant 1 à chacun des nombres de la première colonne.

5.4. - *Chaînes d'opérateurs "multiplier par...", "diviser par..."*

Exemple 1.

$\xrightarrow{x\ 2}$ $\xrightarrow{x\ 3}$

3	6	18
5	10	30
4	8	24

$\xrightarrow{x\ 6}$

On constate que l'on peut passer directement de la première à la troisième colonne en multipliant par 6 chacun des nombres de la première colonne.
On peut donc remplacer la chaîne des opérateurs :

$\xrightarrow{x\ 2}$ $\xrightarrow{x\ 3}$ par l'opérateur $\xrightarrow{x\ 6}$

Exemple 1' (à comparer à l'exemple 1).

$\xrightarrow{x\ 3}$ $\xrightarrow{x\ 2}$

3	9	18
5	15	30
4	12	24

$\xrightarrow{x\ 6}$

Dans les exemples 1 et 1', les premières colonnes sont identiques. On constate que les chaînes

$\xrightarrow{x\ 3}$ $\xrightarrow{x\ 2}$

et

$\xrightarrow{x\ 2}$ $\xrightarrow{x\ 3}$

donnent le même résultat.

Exemple 2.

$\xrightarrow{:3}$ $\xrightarrow{:4}$

36	12	3
24	8	2
48	7	4
21	7	////

$\xrightarrow{:12}$

On constate que l'on peut passer directement de la première à la troisième colonne en divisant par 12
la chaîne des opérateurs

$$\xrightarrow{:3} \qquad \xrightarrow{:4}$$

peut être remplacée par l'opérateur

$$\xrightarrow{:12}$$

Remarque : les résultats de la troisième colonne auraient été les mêmes si on avait d'abord divisé par 4 puis si on avait divisé le résultat par 3.

Exemple 3.

$\xrightarrow{\times 10}$ $\xrightarrow{:2}$

1	10	5
7	70	35
0	0	0
4	40	20

$\xrightarrow{\times 5}$

On peut passer directement de la première à la troisième colonne en multipliant par 5
l'opérateur unique

$$\xrightarrow{\times 5}$$

existe parce que 10 est multiple de 2.

Exemple 4.

$\xrightarrow{x\ 3}$ $\xrightarrow{:\ 12}$

4	12	1
12	36	3
24	72	6
16	48	4

$\xrightarrow{:\ 4}$

On peut passer directement de la première à la troisième colonne en divisant par 4
L'opérateur unique

$$\xrightarrow{:\ 4}$$

existe parce que 12 est multiple de 3.

Exemple 5.

$\xrightarrow{x\ 3}$ $\xrightarrow{:\ 3}$

8	24	8
5	15	5
7	21	7
3	9	3

La chaîne

$$\xrightarrow{x\ 3} \quad \xrightarrow{:\ 3}$$

peut être remplacée par l'opérateur

$$\xrightarrow{x\ 1}$$

ou par l'opérateur

$$\xrightarrow{:\ 1}$$

Exemple 6.

x 6 : 5

35	210	42
5	30	6
15	90	18
20	120	24

Il n'est pas possible de passer directement de la première à la dernière colonne en multipliant ou en divisant par un nombre naturel :

6 n'est pas multiple de 5
5 n'est pas multiple de 6

6. - Fractions.

6.1. Les fractions sont présentées à partir de la notion d'opérateur

Exemple 7.1.

x 7 : 4

12	84	21
24	168	42
4	28	7
16	112	28

Exemple 7.2.

: 4 x 7

12	3	21
24	6	42
4	1	7
16	4	28

On constate qu'à partir de la première colonne, on obtient la même troisième colonne
- en multipliant par 7 puis en divisant le résultat par 4

ou
- en divisant par 4 puis en multipliant le résultat par 7

chacune des chaînes

$\xrightarrow{\text{x 7}} \quad \xrightarrow{\text{: 4}}$

et

$\xrightarrow{\text{: 4}} \quad \xrightarrow{\text{x 7}}$

sera considérée comme un opérateur noté

$$\xrightarrow{\times \frac{7}{4}}$$

lu “multiplier par sept sur quatre” ou “multiplier par sept quarts”
$\frac{7}{4}$ est une *fraction.*
D'une façon générale, x et y désignant des nombres naturels, avec y ≠ 0, *multiplier par* $\frac{x}{y}$ revient à multiplier par x puis diviser le résultat par y.

Exemple 8.

$\xrightarrow{\times 8}$ $\xrightarrow{:6}$

12	96	16
7	56	////
6	48	8
15	120	20

$\xrightarrow{:6}$ $\xrightarrow{\times 8}$

12	2	16
7	////	////
6	1	8
15	////	////

On applique les chaînes

$$\xrightarrow{\times 8} \quad \xrightarrow{:6}$$

et

$$\xrightarrow{:6} \quad \xrightarrow{\times 8}$$

à la colonne (12, 7, 6, 15).
On constate, quand les opérations sont possibles, que les éléments correspondants des troisièmes colonnes sont égaux.
Chacune de ces deux chaînes est considérée comme l'opérateur

$$\xrightarrow{\times \frac{8}{6}}$$

6.2. - *Opérateurs équivalents*

Exemple 9.

$\times \frac{6}{4}$

8	.	.
12	.	.

$\times 6$ $\quad$ $: 4$

Ce tableau peut être décomposé de la façon suivante :

$\times 3$ $\quad$ $\times 2$ $\quad$ $: 2$ $\quad$ $: 2$

8	.	.	.	.
12	.	.	.	.

Les deuxième et quatrième colonnes sont les mêmes (cf. exemple 5)
Le tableau se réduit à :

$\times 3$ $\quad$ $: 2$

8	.	.
12	.	.

$\times \frac{3}{2}$

On dit que

$$\xrightarrow{\times \frac{6}{4}}$$

est équivalent à

$$\xrightarrow{\times \frac{3}{2}}$$

que les fractions $\frac{6}{4}$ et $\frac{3}{2}$ sont équivalentes,
ce qui permet d'écrire

$$\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Remarque :

$$\xrightarrow{\times \frac{2}{2}}$$

est équivalent à

$$\xrightarrow{\times 1}$$

ce qui permet d'écrire

$$\frac{2}{2} = 1$$

$$\xrightarrow{\times \frac{10}{5}}$$

est équivalent à

$$\xrightarrow{\times 2}$$

ce qui permet d'écrire

$$\frac{10}{5} = 2$$

6.3. - *Produit de fractions*

Exemple 10.

$$\xrightarrow{\times \frac{2}{3}} \qquad \xrightarrow{\times \frac{4}{5}}$$

8	.	.
12	.	.

Peut-on remplacer la chaîne d'opérateurs

$$\xrightarrow{\times \frac{2}{3}} \qquad \xrightarrow{\times \frac{4}{5}}$$

par un seul opérateur ?
par définition

$$\xrightarrow{\times \frac{2}{3}}$$

est équivalent à

$$\xrightarrow{\times 2} \qquad \xrightarrow{: 3}$$

$$\xrightarrow{\times \frac{4}{5}}$$

est équivalent à

$$\xrightarrow{\times 5} \quad \xrightarrow{:\,4}$$

donc la chaîne initiale est équivalente à

$$\xrightarrow{\times 2} \quad \xrightarrow{:\,3} \quad \xrightarrow{\times 5} \quad \xrightarrow{:\,4}$$

or on sait que

$$\xrightarrow{:\,3} \quad \xrightarrow{\times 5}$$

est équivalent à

$$\xrightarrow{\times 5} \quad \xrightarrow{:\,3}$$

la chaîne initiale est donc équivalente à

$$\xrightarrow{\times 2} \quad \xrightarrow{\times 5} \quad \xrightarrow{:\,3} \quad \xrightarrow{:\,4}$$

et en composant

$$\xrightarrow{\times 10} \quad \xrightarrow{:\,12}$$

c'est-à-dire

$$\xrightarrow{\times \frac{10}{12}}$$

donc

$$\xrightarrow{\times \frac{2}{3}} \quad \xrightarrow{\times \frac{4}{5}}$$

est équivalent à

$$\xrightarrow{\times \frac{10}{12}}$$

On dit que la fraction $\frac{10}{12}$ est le *produit* des fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{5}$

on écrit

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{10}{12}$$

6.4. - *Fractions inverses*

La chaîne

$$\longrightarrow \left(\times \frac{2}{3} \right) \longrightarrow \qquad \longrightarrow \left(\times \frac{3}{2} \right) \longrightarrow$$

est équivalente à

$$\longrightarrow \left(\times \frac{6}{6} \right) \longrightarrow$$

donc à

$$\longrightarrow \left(\times 1 \right) \longrightarrow$$

Les fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{2}$ sont dites *inverses.*

7. - Nombres décimaux

Les nombres décimaux sont introduits au cours moyen ; à ce niveau les enfants savent écrire et nommer les nombres naturels à partir de groupement d'objets d'un ensemble (cf. 2).

On peut chercher à mettre en évidence le nombre des groupements d'une certaine espèce :

7.1. - *Définition et écriture*

Exemple 1
Le nombre d'habitants de la France est cinquante millions. Si l'on imagine une répartition des Français en groupements comprenant chacun un million d'habitants, le nombre de ces groupements s'écrit 50. Il exprime la population de la France, le million étant choisi comme unité.
Si les groupements choisis comprennent cent habitants, la population s'exprime par le nombre qui s'écrit : 500 000.
Si les groupements ne comprennent qu'un seul habitant, la population s'exprime par le nombre qui s'écrit : 50 000 000.

Exemple 2
Une ville compte 10 850 habitants. Le *millier* étant choisi comme unité, la population s'exprime par le *nombre décimal* 10,850.
La virgule est utilisée pour repérer le rang du groupement choisi comme unité.
Afin de bien comprendre la signification de la virgule, on peut reprendre l'exercice de groupement du paragraphe 2.2 dans une numération où le groupement de base est le groupement par quatre.
- Lorsque l'enfant est choisi pour unité, la population de la classe s'exprime par l'écriture 1 2 3.
- Lorsque le "groupe" (quatre enfants) est choisi pour unité, la population de la classe s'exprime par l'écriture 12,3.
- Lorsque le "grand groupe" (seize enfants) est choisi pour unité, la population de la classe s'exprime par l'écriture 1,23.

D'autres exemples pourront être trouvés à l'occasion d'exercices de mesure utilisant le système métrique.
On remarquera qu'à tout nombre naturel exprimant une mesure on peut associer, par un changement d'unité convenable, un nombre décimal et qu'à tout nombre décimal on peut associer, par un changement d'unité, un nombre naturel (et cela de diverses façons).

7.2. - *Opérations sur les nombres décimaux*

7.2.1. - *Addition et soustraction*

Exemple 3
Trois villes voisines, A, B, C, se sont réunies pour ne plus former qu'une seule agglomération. Leurs populations étaient, en milliers d'habitants

A	28,5
B	11,4
C	4,7

Quelle est, en milliers d'habitants, la population de la nouvelle ville ainsi formée ?
Cet exemple montre que l'on peut définir l'addition des nombres décimaux en l'associant à l'addition des nombres naturels.
Il en est de même pour la soustraction des nombres décimaux.

7.2.2. - *Multiplication et division*

7.2.2.1. - Multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier.

Elle se présente comme une addition de nombres décimaux égaux.
Exemple : 0,2 x 3 = 0,2 + 0,2 + 0,2 = 0,6

7.2.2.2. - Multiplication et division par 10, 100, 1 000

D'après les propriétés de la numération et de la multiplication :

2 x 10 = 20	20 : 10 = 2
430 x 10 = 4 300	4 300 : 10 = 430

7.2.2.3. - Multiplication de deux nombres décimaux

Un changement d'unité la ramène à la multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier.

7.2.2.4. - Division exacte d'un nombre décimal par un nombre décimal

Les notions de division exacte et de quotient exact définies pour les nombres naturels a et b s'étendent aux nombres décimaux :
a et b étant entiers ou décimaux, le quotient exact de a par b, s'il existe, est le nombre entier ou décimal dont le produit par b est égal à a.
Si on représente ce quotient exact par ☐, on a :

☐ x b = a
ou b x ☐ = a
ou a : b = ☐

Si b est un nombre naturel, la recherche du quotient exact se justifie en utilisant la propriété suivante que l'on vérifiera sur des exemples numériques : Si on multiplie l'un des facteurs par 10, 100, 1 000, ..., le produit est multiplié par 10, 100, 1 000, ...
Le cas où b est un nombre décimal se ramène au cas précédent.
On se limitera dans les exercices à des nombres simples. Il conviendra de remarquer que le quotient exact tel qu'il a été défini n'existe pas toujours.

7.2.2.5. - Quotient approché

Le sens des expressions quotient à 1 ; 0,1 ; 0,01 près pourra être précisé à l'occasion d'exercices.
Remarque : Des exercices sur les relations numériques, du même type que ceux présentés dans le paragraphe 5, pourront être effectués en prenant des listes de nombres décimaux. Les opérateurs numériques pourront également utiliser des nombres décimaux.

8. - Résolution de problèmes

La classe avec sa vie propre, l'enseignement que l'on y donne en toutes matières, le monde extérieur fourniront de nombreuses occasions d'exercer, à chaque niveau et selon les possibilités des enfants, cette activité privilégiée qu'est la résolution des problèmes, qu'ils soient numériques ou non numériques.

Les thèmes seront des plus divers. Ils permettront en particulier une certaine initiation des élèves à la vie courante de leur époque, que l'enseignement élémentaire se doit de leur donner. Toutefois, les situations retenues dans ce domaine correspondront aux préoccupations et aux intérêts réels des enfants. Elles seront, suivant les cas, soit des motivations pour l'introduction de notions nouvelles, soit des applications de propriétés ou de relations préalablement étudiées par les élèves.

Il y a problème si, connaissant un certain nombre d'informations concernant une situation, on se propose de déduire de ces informations des renseignements non explicités initialement.

Résoudre un problème, c'est analyser la situation et les informations données, dégager éventuellement des chaînes de situations élémentaires, les schématiser afin de mettre en évidence les relations mathématiques qui les décrivent, utiliser ces relations et leurs propriétés pour en déduire les renseignements cherchés.

Les élèves doivent apprendre à passer d'une situation à un schéma mathématique qui la décrit ; inversement, un bon exercice consiste à imaginer des situations décrites par un schéma donné.

C'est dans de telles activités que s'affermit la pensée mathématique des élèves et qu'ils prennent mieux conscience du pouvoir qu'elle leur donne sur le monde extérieur.

2^{e} partie
Exercices d'observation et travaux sur des objets géométriques

L'espace physique et les objets qui le peuplent fournissent une matière sur laquelle la pensée mathématique a bien des occasions de s'exercer. Ces exercices doivent, en même temps, aider l'enfant à s'adapter à ce milieu. Ils font appel, non seulement à *l'observation* mais aussi à l'activité manuelle qui soutient, complète l'observation et l'étude des situations et des choses. L'enfant doit acquérir le goût de travaux manuels : tracer, dessiner, plier, découper pour *construire.* L'emploi des instruments (règle, équerre, compas...) pour la réalisation de ces constructions développera l'habileté et le soin.

On se devra de proposer aux enfants des thèmes et des buts d'activité à leur mesure et conformes à leur intérêt.

Il y aura souvent avantage à réaliser ces exercices en équipes.

Les démarches mathématiques porteront, comme dans le domaine numérique, sur la découverte de propriétés, les classements selon telle ou telle propriété, l'étude de relations sur un objet ou entre des objets.

On reconnaît :
- que deux lignes droites sont perpendiculaires ou forment un angle droit par un pliage convenable ou à l'aide de l'équerre ;
- que deux lignes droites sont parallèles à l'aide de la règle et de l'équerre ;
- qu'un polygone découpé dans du carton épais et rigide est convexe par exemple en l'entourant d'un élastique et constatant que cet élastique est en contact avec tous les sommets.

Pour un polygone, on peut s'intéresser aux propriétés suivantes : convexité, nombre de côtés, nombre de sommets, longueur de côtés, existence de côtés parallèles, etc.

Les enfants ayant construit différents polygones, ils pourront les classer selon l'une ou l'autre de ces propriétés : ainsi, s'il s'agit de quadrilatères, ils distingueront, par exemple, les parallélogrammes et, parmi ceux-ci, les rectangles, les losanges. Ils découvriront ainsi que les carrés sont les quadrilatères qui ont la propriété d'être à la fois des rectangles et des losanges.

Une autre direction de travail peut être la fabrication de plans : plan de la classe, de la cour de l'école, du quartier, etc. Chez les enfants les plus jeunes, on peut s'intéresser surtout à la disposition des objets les uns par rapport aux autres. L'utilisation des mesures permettra ensuite l'exécution de plans à une échelle donnée.

Le repérage sur une droite ou sur un quadrillage pourra servir de thème à des exercices divers.

Pour un polyèdre (tétraèdre, cube, parallélépipède, prisme, etc.), on pourra s'intéresser à la nature des faces, à leur nombre, au nombre des sommets, à celui des arêtes, à leur disposition relative.

Les résultats de ces recherches seront utilisées par les enfants en travail manuel pour construire de tels objets géométriques, en carton par exemple.

3^e partie
Mesures

1. - *Le mot mesure* a, dans la langue usuelle, des acceptions diverses qu'il est important de distinguer.

Exemple :

Je mesure la table. - La table mesure 3 mètres.
Prendre les mesures d'un vêtement.
Le service des Poids et Mesures.

Les enfants ont déjà entendu de telles expressions. Ils les utilisent. Ils continueront à le faire dans le langage courant mais la signification mathématique du mot *mesure* devra être introduite.

En mathématique, une mesure d'un objet est un nombre.

Dans l'expression "la table mesure trois mètres", le mètre est pris pour unité ; dans ces conditions, la longueur de la table est le nombre 3. Dans la vie courante, on associe d'ailleurs des nombres à des objets. On dit par exemple : un lit de 90, une roue de 650, une vis de 3 x 25, une feuille de 21 x 27 (qui est lu vingt et un, vingt-sept), chausser du 36, une chemise de 40 d'encolure. Pour faire un vêtement sur mesure, on relève une suite ordonnée de nombres dont chacun a une signification bien particulière suivant sa place dans la liste.

Dans certains cas, apparaît l'idée d'échelle (pointure de chaussure, température). Dans d'autres, il s'agit de mesure : l'expression "roue de 650" désigne toute une catégorie d'objets qui ont une propriété commune : la mesure de leur diamètre est la même ; dans l'exemple de la vis de 3 x 25, la catégorie est définie à l'aide d'un couple de mesures (3 ; 25).

Des expressions telles que un quart d'heure, un demi-litre, avoir parcouru les trois quarts du chemin, un quart de beurre, utilisent le vocabulaire des fractions. L'étude des situations correspondantes peut donner lieu à des calculs numériques.

2. - *Exercices pratiques de mesure*

A l'école primaire, l'idée de mesure est toujours intimement liée à la pratique, à l'activité manuelle, à l'expérience, à l'étude du milieu. Le premier rôle du maître consiste à offrir aux enfants un vaste champ d'expériences les amenant à comparer. Ils ressentiront alors le besoin de mesurer.

2.1. - Une activité préparatoire à la mesure consiste, pour les enfants, à chercher des expériences permettant de répondre à des questions telles que :

A est-il plus grand que B ?
C contient-il autant que D ?
E met-il moins de temps pour venir à l'école que F ?
G est-il plus lourd que H ?

Trouver des objets plus lourds que K et moins lourds que L.

2.2. - Peu à peu, au cours des activités précédentes, va se dégager l'idée que de nombreuses comparaisons peuvent s'exprimer en utilisant des nombres. Par exemple, la longueur d'une certaine règle est double de la longueur d'un certain crayon.

Si, de façon arbitraire, on attribue à la longueur du crayon le nombre 1 (c'est-à-dire si on choisit ce crayon comme unité), la longueur de la règle est 2. Pour un objet donné, on peut s'intéresser à diverses mesures. Pour exprimer une mesure d'un objet, il faut avoir choisi *une unité.* Cette *mesure,* au sens mathématique du terme, est alors *le nombre* associé à cet objet.

Dans l'exemple précédent, on pourra écrire : l'unité étant le crayon, la longueur de la règle est 2.

Les unités seront d'abord celles que proposeront les enfants. La nécessité de la communication des résultats amènera à choisir, pour tous les enfants de la classe, pour tous les groupes d'enfants travaillant en équipe, la même unité. On arrivera ainsi peu à peu à l'utilisation des unités légales.

Les comptes rendus d'expériences pourront être présentés dans des tableaux.

Exemple : l'unité étant le centimètre

	a pour longueur →
ma règle	32
mon cartable	40
ma gomme	3

Certaines expériences conduisent à effectuer la somme (ou la différence) de deux mesures, le produit (ou le quotient) d'une mesure par un nombre entier.

Exemple : On forme une barre en mettant bout à bout deux règles dont les longueurs, l'unité étant le centimètre, sont 12 et 5. La longueur de la barre en centimètres est (12 + 5)

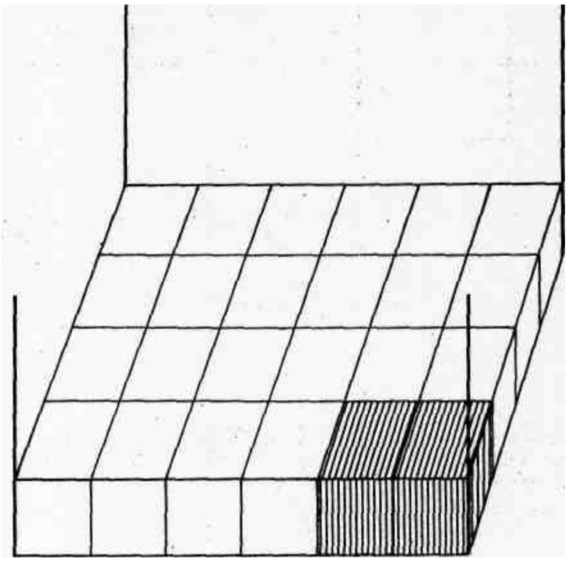
$$12 + 5 = 17$$

On écrira : Le centimètre étant l'unité, la longueur de la barre est 17 ou la longueur de la barre en centimètres est 17, ou encore en langage courant, la longueur de la barre est 17 centimètres.

Des exemples analogues concerneront des masses, des durées, des aires, des volumes... (la notion de capacité n'est pas distinguée de celle de volume).

Exemple : On construit une boîte dont les côtés ont pour dimensions, une unité étant choisie, 6, 4, 7. Nous choisissons comme unité de volume une barre dont les dimensions sont 2, 1, 1.

Quel est le volume de la boîte ?



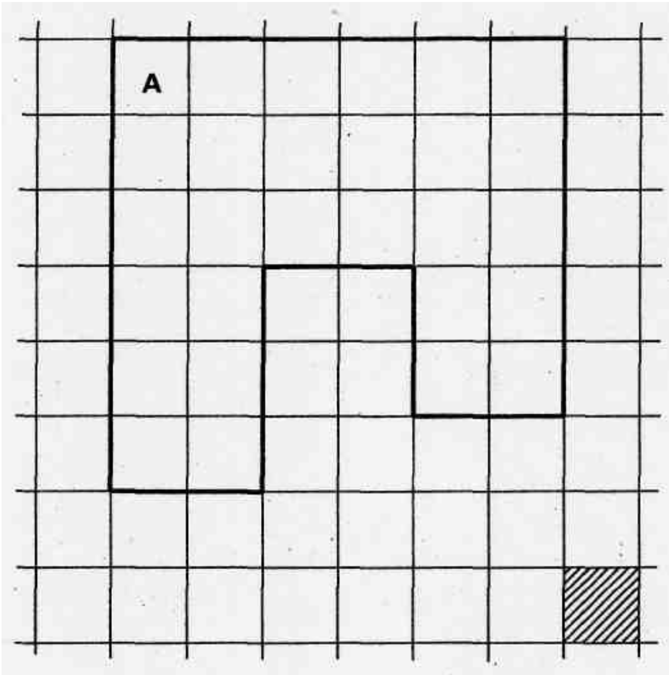
Nous pouvons empiler 7 couches comprenant chacune (3 x 4) barres. La boîte contient (3 x 4 x 7) barres.

Le volume de la boîte, la barre étant choisie pour unité, est (3 x 4 x 7)

$$3 \times 4 \times 7 = 84$$

2.3. - Au cours moyen, on pourra faire une étude plus approfondie de la notion de mesure à partir de surfaces sur fond de quadrillage.

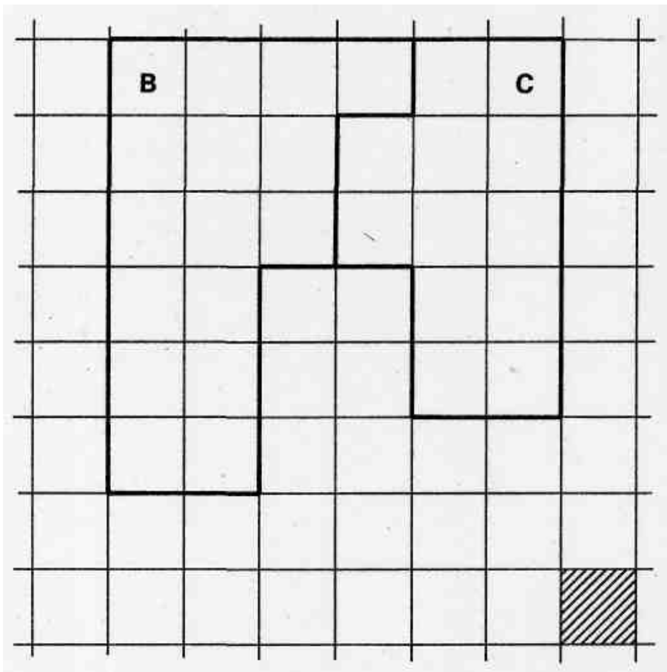
2.3.1. - *Exemple* : La surface A est bordée par des lignes du quadrillage.



Prenons comme unité le carreau, la mesure de la surface A ou aire de A que l'on peut noter mes A ou aire A peut être obtenue par un simple dénombrement de carreaux.
Dans cet exemple

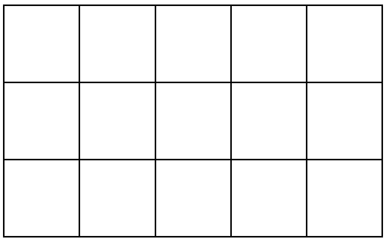
aire A = 28

2.3.2. - *Exemple* 1 : A est la réunion de deux surfaces B et C.



B et C ne se recouvrant pas. Le carreau étant pris pour unité, on constate que :
aire B = 16
aire C = 12
aire A = 16 + 12
aire A = aire B + aire C

Exemple 2

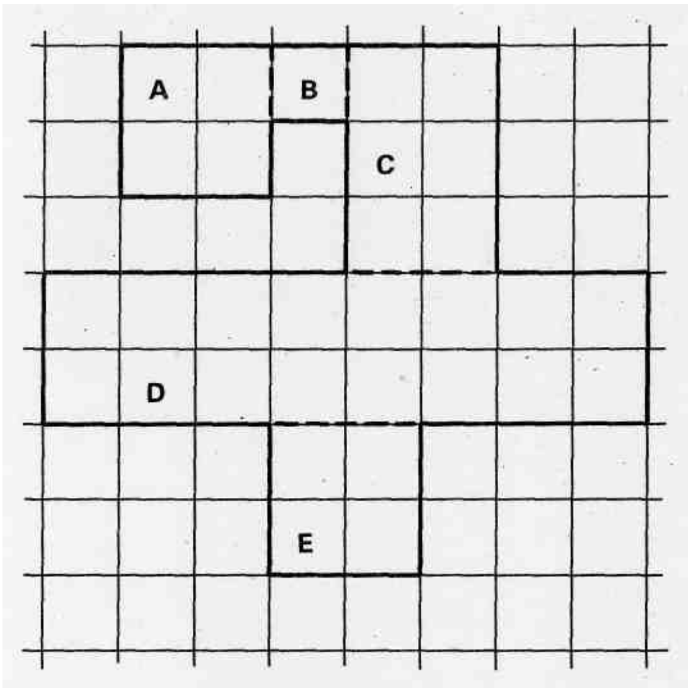


Le carreau étant choisi pour unité, le rectangle R se décompose naturellement en 3 bandes de 5 carreaux.

aire R = 3 x 5 = 15

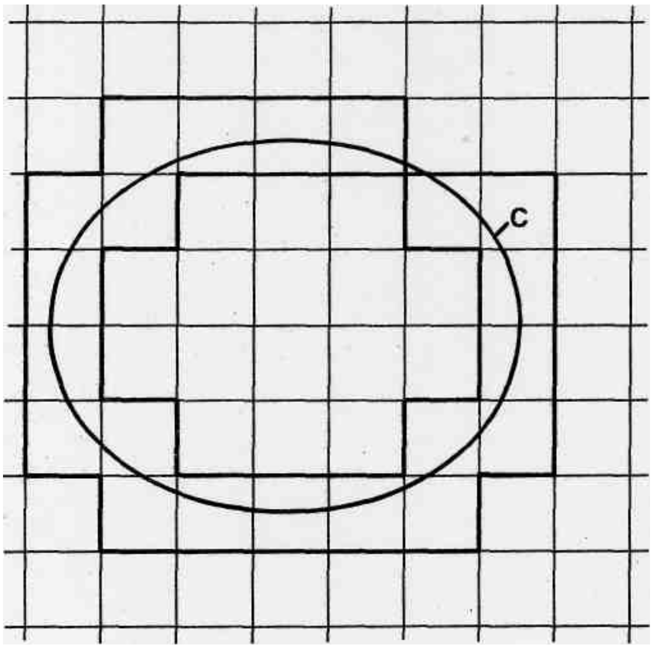
Application : pour chercher la mesure d'une surface S, on peut souvent décomposer cette surface en parties disjointes rectangulaires.

Exemple 3



La surface S délimitée par le trait gras peut être découpée de la façon ci-contre. Nous aurons alors pour les mesures des différentes parties,
aire A = 2 x 2 = 4
aire B = 1
aire C = 3 x 2 = 6
aire D = 2 x 8 = 16
aire E = 2 x 2 = 4
aire S = aire A + aire B + aire C + aire D + aire E = 4 + 1 + 6 + 16 + 4 = 31
L'unité d'aire étant le carreau, l'aire de S est 31.
Cet exemple montre que les opérations sur les nombres sont naturellement utilisées dans les exercices sur les mesures.

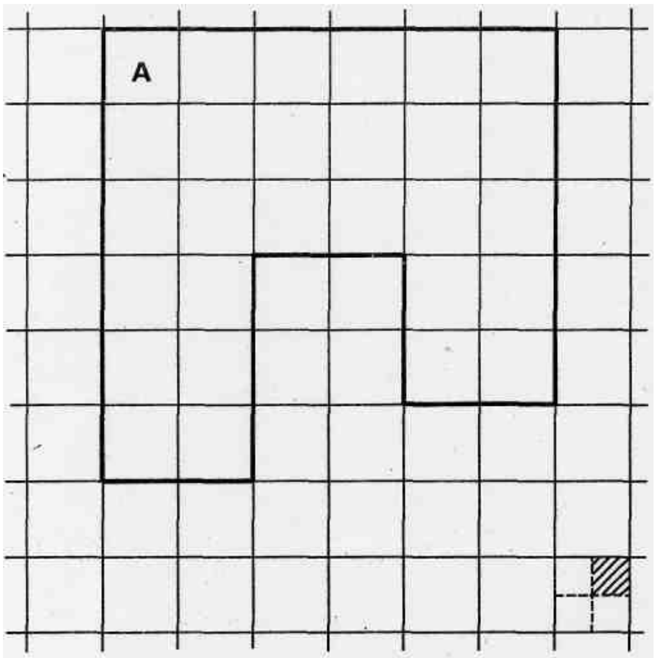
2.3.3. - Encadrement d'une aire



Bien que l'on ne puisse pas dire quelle est l'aire s de la surface intérieure à la courbe C, quand on choisit le carreau comme unité, il est possible d'encadrer s par deux nombres entiers naturels.

$$16 < s < 37$$

2.4. - *Changement d'unité*



1/ Reprenons l'exemple 1 du § 2.3.1., choisissons comme nouvelle unité le carré hachuré. Chacun des carreaux en contient 4. La nouvelle aire de A est le nombre (28 x 4).
2/ Choisissons comme nouvelle unité le rectangle hachuré sur la figure ci-contre ; chacun des carreaux en contient 6. La nouvelle aire de A est le nombre (28 x 6).

3/ Si on choisit comme unité de surface un rectangle de dix carreaux, l'aire de A est le nombre 2, 8 (cf. § 1.7.1. exemple 2).

2.5. - *Système métrique*

L'étude du système métrique permet aux élèves de connaître notre système d'unités légales et aussi d'utiliser les nombres décimaux.

On se limitera, dans les exercices pratiques, aux unités les plus habituellement utilisées.

Dans chaque cas, l'unité retenue sera l'objet d'un choix lié à la nature de la situation étudiée.

Pour le ministre et par délégation :
Le directeur du Cabinet,
André GIRAUD.