Brève de compteur N° 1 - La multiplication : une addition répétée ?

Première partie – ***Deuxième partie***

Première partie : La multiplication avant et après 1970

Depuis les années 1850 jusqu'en 1970, on a défini la multiplication à l'école primaire comme addition répétée. On peut montrer facilement que cette définition, et pas seulement à l'école, était beaucoup plus ancienne puisque voici ce qu'en disait au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle et sans remonter plus haut, l'Encyclopédie :

> "MULTIPLICATION, s. f. *en Arithmétique*, c'est une opération par laquelle on prend un nombre autant de sois qu'il est marqué par un autre, afin de trouver un résultat que l'on appelle *produit*. Si l'on demandoit, par exemple, la somme de 329 liv. prises 58 sois; l'opération par laquelle on a coûtume, en Arithmetique, de déterminer cette somme, est appellée *multiplication*. Le nombre 329, que l'on propose de multiplier, se nomme *multiplicande;* & le nombre 58, par lequel on doit multiplier, est appellé *multiplicateur;* & enfin on a donné le nom de *produit* an nombre 19082, qui est le résultat de cette opération"
> http://artflsrv02.uchicago.edu/cgi-bin/philologic/getobject.pl?c.9:2244.encyclopedie0513

Les maths modernes, pour différentes raisons toutes aussi fausses les unes que les autres et notamment parce que cet enseignement était considéré comme "*un obstacle à la compréhension de la commutativité de la multiplication*", d'où l'importance du thème, refusaient cette définition de la multiplication.

Voici un exemple fondamental de cette problématique de définition de la multiplication telle que l'envisageait l'APMEP en 1972

5) La multiplication dans N[1]

Traditionnellement, elle était présentée à partir des "grandeurs". Il s'agissait de trouver le prix de 6 livres à 3 F pièce, ou la longueur de tissu nécessaire pour faire 6 robes en sachant que la confection de chacune demande 3 m d'étoffe.

Il faudra donc que les maîtres renoncent à cette présentation et, surtout, qu'ils abandonnent radicalement les écritures telles que

6F × 3 = 18 F	ou	3 × 6F = 18F
6m × 3 = 18 m	ou	3 × 6m =18m

Nous savons, en effet, que le signe " = " ne peut être placé qu'entre deux écritures d'un même naturel et non entre des "grandeurs". Pour réformer les habitudes mentales, mieux vaut abandonner les notions de multiplicande (mesure d'une "grandeur") et de multiplicateur (nombre de "grandeurs", nombre de "fois").

La nouvelle situation de base est celle d'une certaine disposition, par lignes et colonnes, d'une collection d'objets. Prenons, par exemple, une collection de douze objets, et disposons ces objets de la façon suivante :

```
*    *    *    *
*    *    *    *
*    *    *    *
```

Nous voyons 3 lignes de 4 objets ou 4 colonnes de 3 objets. Cette disposition nous permet d'écrire le naturel douze sous la forme

4×3 ou 3×4

que nous appelons produit des naturels 4 et 3.

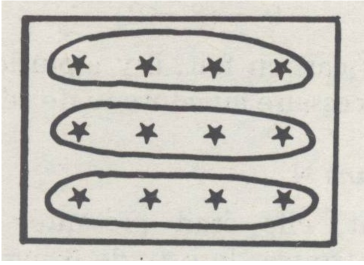
Signalons aux maîtres que cette situation est celle qui leur permettra le mieux, plus tard, d'aborder le produit de deux naturels à partir du produit cartésien de deux ensembles.

Nous pouvons tout de suite, avec ces nouvelles écritures de douze, former des égalités :

3×4 = 4×3	4×3 = 3×4
12 = 3×4	3×4 =12
12 = 4×3	4×3 =12

[1] *In* Marguerite Robert, *Un nouvel état d'esprit*, pages 34-35 de *La mathématique à l'école élémentaire*, APMEP, Paris, 1972, 502 pages.

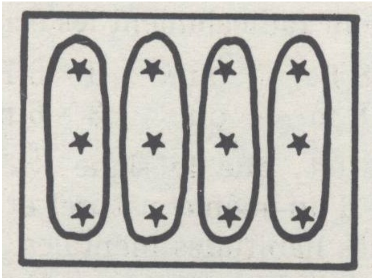
Par ailleurs, notre nouvelle situation de base n'est pas sans lien avec la précédente. Il suffit de modifier le dessin de la façon suivante :



pour retrouver l'écriture de douze sous forme de somme :

4 + 4 + 4

ou encore de la modifier ainsi :



pour obtenir la somme :

3 + 3 + 3 + 3

Nous pouvons donc passer de l'écriture d'un naturel sous forme de produit à deux écritures de ce naturel sous forme de somme de termes égaux.

Ainsi le naturel 5 × 2 peut s'écrire

2 + 2 + 2 + 2 + 2 ou 5 + 5

5×2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 5 × 2 = 5 + 5

De même nous pouvons écrire une somme de naturels égaux sous forme de produit.

7 + 7 + 7 s'écrira 7 × 3 ou 3 ×7

7 + 7 + 7 = 7 × 3

7 + 7 + 7 = 3 × 7

Nous pouvons encore, par le passage implicite au produit, remplacer une somme de naturels égaux par une autre somme, par exemple

7 + 7 + 7 par 3+ 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3

7 + 7 + 7 = 3+ 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3

Dans tout ce qui précède, la notion de produit se réfère à l'image mentale d'une collection d'objets disposés en lignes et colonnes. Ainsi en lisant

5 × 3

nous voyons mentalement 5 lignes de 3 ou 5 colonnes de 3.

On a d'abord une belle ânerie mathématique: on ne peut écrire « 3 × 6m =18m » car

> Nous savons, en effet, que le signe " = " ne peut être placé qu'entre deux écritures d'un même naturel et non entre des "grandeurs"

C'est absolument crétin puisque que "l'on peut écrire"

$$3 \times 6X = 18X$$

ou

$$3 \times 6\vec{u} = 18\vec{u}$$

alors qu'aucun des deux membres de chacune des égalités n'est un nombre naturel.

Et cette ânerie est d'autant plus remarquable qu'elle fait partie d'un des textes de fond d'un courant qui se présentait comme LE défenseur des mathématiques et faisait la chasse à la moindre erreur formelle d'écriture.

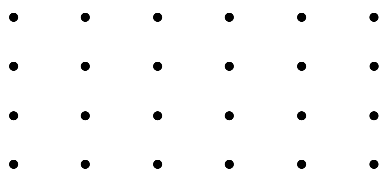
Et donc, pour remplacer cette introduction de la multiplication par les grandeurs, nous avons une situation présentée comme ***nouvelle* situation de base**

> La nouvelle situation de base est celle d'une certaine disposition, par lignes et colonnes, d'une collection d'objets. Prenons, par exemple, une collection de douze objets, et disposons ces objets de la façon suivante :

*	*	*	*
*	*	*	*
*	*	*	*

Or cette "nouvelle" situation de base n'a vraiment rien de nouveau puisque l'article *Arithmétique* de la première édition du Dictionnaire de pédagogique de Fernand Buisson, écrit au moins quatre vingt ans avant le texte de l'APMEP dit en son point 5:

> 5. La multiplication n'est autre chose qu'une addition dans laquelle tous les nombres à ajouter sont égaux; après avoir introduit ainsi l'idée de multiplication en opérant sur de petits nombres, on fera construire aux élèves, et apprendre par cœur la table de multiplication.
> Quand ils la sauront bien, on pourra aborder la multiplication d'un nombre de deux chiffres par un nombre d'un seul, celle d'un nombre de trois chiffres par un nombre d'un seul, enfin la multiplication de deux nombres de deux ou trois chiffres chacun. On s'en servira pour faire résoudre de petits problèmes pratiques très élémentaires.
> On montrera sur un tableau analogue à celui-ci :



> qu'un produit de deux facteurs est indépendant de l'ordre de ces facteurs ; et l'on utilisera cette propriété pour faire la preuve de la multiplication.

L'article du dictionnaire pédagogique n'introduit ce schéma que pour prouver la commutativité de la multiplication. Tout le changement apporté par l'APMEP consiste à se servir du même schéma comme situation type de définition de la multiplication, ce qui est explicitement dit :

> Dans tout ce qui précède, la notion de produit se réfère à l'image mentale d'une collection d'objets disposés en lignes et colonnes. Ainsi en lisant 5 × 3, nous voyons mentalement 5 lignes de 3 ou 5 colonnes de 3.

Ainsi en introduisant comme définition de la multiplication un schéma qui sert à prouver que la multiplication est commutative, on est sur que l'APMEP va, par la suite, en déduire une conception de la multiplication dans laquelle la commutativité joue un rôle majeur. Nous en verrons les conséquences ultérieurement.

Ceci dit, j'affirme - sans preuves ici mais elles viendront - que la critique des maths modernes faites dans la deuxième moitié des années 70 en est une fausse critique car elle a évite de critiquer des erreurs portant sur des questions fondamentales et ces erreurs ont donc continué à se propager.
Or la definition de la multiplication est une bien une question centrale des mathématiques et le refus de la définition de la multiplication comme addition répétée est justement une illustration flagrante de ce phénomène puisqu'on la trouve encore défendue officiellement en 2014, soit 44 ans après l'officialisation de cette position caractéristique des maths modernes.

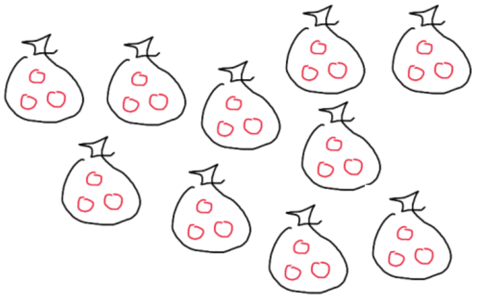
17 mars 2014
Michel Delord

Deuxième partie : La multiplication en 2014

Yves Thomas est formateur IUFM des pays de Loire. Il signe "vieuxmatheux" sur le forum *Enseignants Du Primaire* - EDP- et anime le site *Primaths* dans le quel on trouve un fichier présenté sur la page Cycle 2 qui traite justement explicitement de ce qui nous intéresse, *L'introduction de la multiplication*. Il commence ainsi :

Dans certains fichiers, la multiplication n'est que le résumé d'une addition réitérée. À quoi cela peut-il bien servir aux élèves ? Si je rencontre 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 ce qui, soit dit en passant, n'arrive pas tous les jours, et qu'on me dit que ça peut s'écrire 10 x 3 et se lire « dix fois trois » je ne suis pas beaucoup plus avancé pour savoir à quel nombre ça correspond.

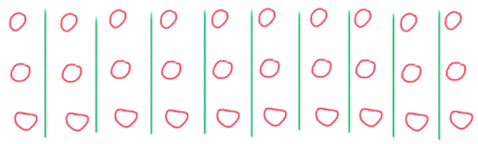
Il y a 10 fois 3 billes… mais cela fait combien de billes ?
???



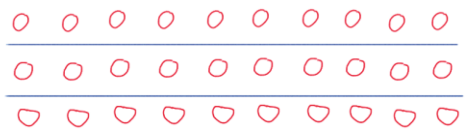
Il y a 10 fois 3 billes… mais cela fait combien de billes ?
???

C'est pourquoi il nous semble fondamental d'introduire très rapidement l'idée suivante. Si je dispose mes billes en rectangle comme ceci,

je peux toujours voir 10 fois 3 billes,



mais il me suffit de regarder différemment, en m'aidant par exemple de traits horizontaux pour voir qu'il y a aussi 3 fois 10 billes.



3 fois 10 billes, c'est 3 dizaines de billes. Si on a bien compris le système décimal, on voit tout de suite que ça s'écrit 30 billes.

10 fois 3 billes, c'est autant que 3 fois 10 billes, c'est 30 billes.

L'organisation en tableau rectangulaire n'est pas réservée au cas de 10 fois 3.

Yves Thomas nous dit donc :

> *"Dans certains fichiers, la multiplication n'est que le résumé d'une addition réitérée.*
> *À quoi cela peut-il bien servir aux élèves ?*
>
> *Si je rencontre 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 ce qui, soit dit en passant, n'arrive pas tous les jours, et qu'on me dit que ça peut s'écrire 10 x 3 et se lire « dix fois trois » je ne suis pas beaucoup plus avancé pour savoir à quel nombre ça correspond."*

Et là, il y a quand même au milieu d'une série de raisonnements tendant à suggérer l'inanité pédagogique de la définition de la multiplication comme addition répétée et donnant une importance démesurée à la commutativité - mais sans jamais aborder directement la question et encore moins discuter sérieusement les raisons de ce choix -, une perle

> " *Si je rencontre 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 ce qui, soit dit en passant, n'arrive pas tous les jours*".

Et c'est bien vrai que ça ne se rencontre pas tous les jours. Mais c'est justement parce que la multiplication a été inventée pour qu'on ne le rencontre plus.

Si l'on devait aborder l'introduction de la multiplication sous l'angle sous lequel *vieuxmatheux* l'aborde ici - ce qui heureusement n'a rien de mathématiquement obligatoire même si c'est assez courant - , ne serait-il pas plus juste de dire :

> "*Si vous ne rencontrez pas - et heureusement - l'écriture 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3, c'est parce qu'on a décidé de la noter 3×10* [Note2] *parce que c'est moins long et beaucoup plus pratique »*

Mais ce serait aller contre la logique de l'auteur qui veut fondamentalement montrer l'inadéquation de la définition de la multiplication comme addition réitérée.
On peut remarquer, comme en 1970, *vieuxmatheux* met en avant un exemple où la commutativité de la multiplication joue un rôle crucial et impose donc comme première image de la multiplication « *l'image mentale d'une collection d'objets disposés en lignes et colonnes* » .

Et je pourrais donc arrêter là mes commentaires puisque je prouve ainsi que les positions des maths modernes sur une question aussi centrale que la définition de la multiplication en primaire sont encore, 44 ans après, défendues officiellement par des formateurs IUFM et sont répandues sans critique dans un forum aussi important que EDP qui comporte plusieurs milliers d'inscrits.

Notons cependant la problématique de *vieuxmatheux* n'est pas neutre et demande à être analysée.
Pourquoi choisit-il de poser comme question d'introduction de la multiplication *« Combien vaut 3+3+3+3+3+3+3+3+3+3 ?* » ?
Pourquoi n'a-t-il pas choisi 3×4 et 4×3 ou 11×3 et 3×11?
Pourquoi poser la question de la multiplication comme il la pose ? Pourquoi choisit-il une multiplication très particularisée dans laquelle il y a une différence très forte possible entre le calcul de $a\times b$ et celui de $b\times a$?

Ce sont des questions auxquelles il faudra répondre en intégrant l'analyse de la suite du texte de *vieuxmatheux*, texte qui est en annexe.

30 mars 2014
Michel Delord

[2] ou 10×3, mais ce n'est pas le débat d'aujourd'hui.

Annexe

Suite et fin du texte de *vieuxmatheux :*

L'organisation en tableau rectangulaire n'est pas réservée au cas de 10 fois 3.En disposant les objets en rectangle, on voit aussi que :

17 fois 2 c'est comme 2 fois 17
9 fois 8 c'est comme 8 fois 9
100 fois 4 c'est comme 4 fois 100
4 fois 25 c'est comme 25 fois 4

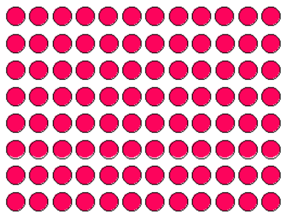
Cette capacité à passer d'une vision à l'autre de la grille rectangulaire, permet dans certains cas de faciliter les calculs :

2 fois 17, c'est-à-dire 17 + 17, est plus facile que 17 fois 2.
4 fois 100, c'est-à-dire 4 centaines, est plus facile que 100 fois 4.
4 fois 25 est plus facile que 25 fois 4.

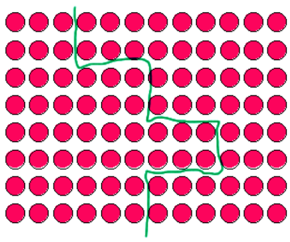
En revanche pour 8 fois 9 et 9 fois 8, aucun des deux n'est vraiment sympathique… c'est pourquoi on sera obligé plus tard d'apprendre par cœur le résultat. On peut alors s'entraîner à simplifier des calculs à l'aide de la disposition en rectangle.
Voici quelques exemples de ce qu'on peut proposer :

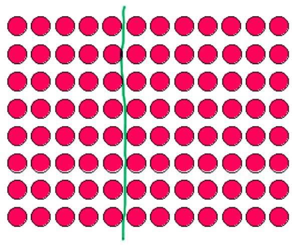
10 x 7 c'est 10 fois 7, mais c'est aussi 7 fois 10 ou 70
234 x 2 c'est 2 x 234 c'est-à-dire 234 + 234 ou 468.
6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 8
c'est 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 2,
c'est donc 10 fois 6 plus 2.
Comme 10 fois 6 c'est 6 fois 10, ou encore 60, le total vaut donc 62.
12 x 13 c'est 13 x 12, mais aucun des deux n'est sympathique.

Quelques jours ou semaines plus tard, on propose 8 x 12, qui ne semble guère plus sympathique.



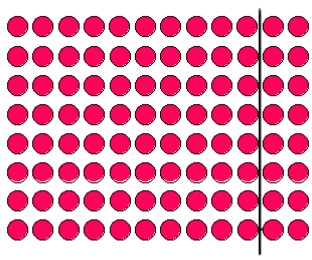
Le maître suggère de découper la grille en deux morceaux plus faciles à calculer.



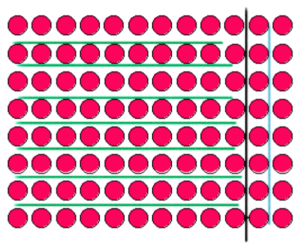


Le premier essai oublie que les rectangles peuvent simplifier la tâche, le second utilise des rectangles qui ne la simplifient guère. Dans les séances précédentes, les rectangles ayant une dimension de 10 étaient commodes, il n'est pas impossible qu'avec un petit temps de réflexion l'idée suivante vienne des élèves. Si ce n'est pas le cas, le maître n'hésitera pas à la donner.

En partageant ainsi, les points sont faciles à dénombrer dans chacun des deux rectangles…



… à condition d'utiliser les découpages qui conviennent le mieux.



Dans la partie de gauche, il y a 8 fois 10 points, c'est-à-dire 80 points. Dans la partie de droite, il y a 2 fois 8 points, c'est-à-dire 16 points. Il y a en tout

80 points plus 16 points, c'est-à-dire 96 points.

$$8 \times 12 = 96$$

La technique usuelle de multiplication n'est pas encore là, mais on s'en approche…

*　　　*　　　*

Remarque

Pour mettre en évidence la commutativité de la multiplication, on pourrait se contenter de calculer les deux suites d'additions :

> ***On constate que 5 + 5 + 5 + 5 = 20,***
>
> ***on constate également que 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20***
>
> ***ce qui montre que 4 fois 5, c'est la même chose que 5 fois 4.***

Cette approche nous semble insuffisante car, elle laisse mystérieuse la raison pour laquelle les deux résultats sont égaux. Un exemple traité à l'aide de la disposition rectangulaire est au contraire générique : la raison profonde de l'égalité est qu'il s'agit des mêmes objets que l'on dénombre par des procédés différents. Comme il s'agit des mêmes objets, le nombre est le même dans les deux cas.

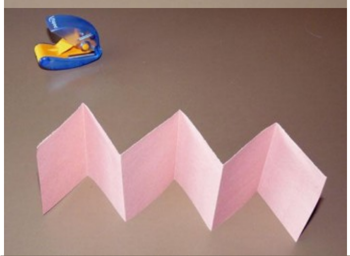
Il parait raisonnable de penser que si on ajoute une ligne ou une colonne au tableau rectangulaire, le phénomène restera valable, on pourra toujours compter les objets ligne par ligne ou colonne par colonne. Enfin, on remarquera qu'avec la disposition rectangulaire, il n'est pas nécessaire de calculer le résultat pour comprendre que 6 fois 8 vaut autant que 8 fois 6, ce qui contribue grandement à la généralisation visée.

Une suite possible

Quand les élèves ont bien compris que 8 fois 11billes et 11 fois 8 billes, ça fait autant de billes et qu'ils ont commencé à utiliser cette propriété pour calculer plus facilement, le moment nous semble venu d'introduire l'expression "8 multiplié par 11".Voici une des façons possibles de le faire.

Voici une bande de papier et une perforatrice. Je veux faire rapidement beaucoup de trous dans la bande.

Pour ça, je vais plier la bande. Par exemple, je la plie en six morceaux comme sur la photo.

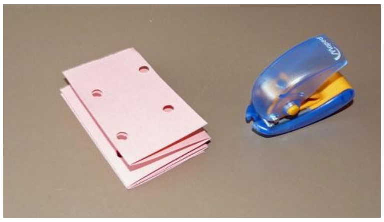


Ce pliage permet de faire six trous à la fois. On obtient donc beaucoup de trous facilement grâce au pliage.

Grâce au pliage, à chaque fois que je perce, j'obtiens six trous au lieu d'un, on dit que les trous sont multipliés par six.
En vieux français, le mot "moulte" voulait dire beaucoup, et notre mot "multiplier" vient des mots "moulte" et "plier".

J'ai percé quatre fois, et comme il y avait six couches de papier, il y a :

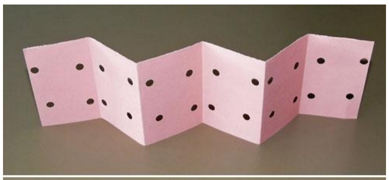
quatre trous multipliés par six

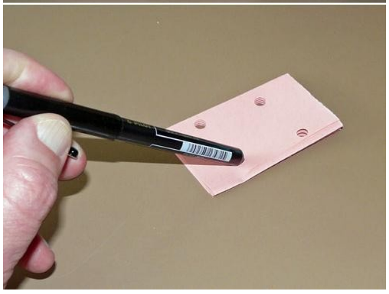


Quatre trous, multipliés par six, c'est combien de trous ?
Pour le savoir , je peux déplier ma feuille et compter panneau par panneau.Il y a quatre trous sur le premier panneau, quatre trous sur le deuxième panneau…
en tout, le nombre de trous est

4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4

Quatre multiplié par six, c'est autant que six fois quatre.





Je peux aussi compter les trous en gardant la feuille pliée. Quand j'ai percé ici, j'ai fait six trous à la fois, car j'ai percé toutes les couches de papier. Aux autres endroits où j'ai percé, j'ai également fait six trous.
En tout, le nombre de trous est
6 + 6 + 6 + 6
Quatre multiplié par six, c'est autant que quatre fois six.

On peut évidemment refaire le travail avec 6 multiplié par 4. Si on compte panneau par panneau, on constate que 6 multiplié par 4, c'est autant que 4 fois 6. Si on compte perçage par perçage, on constate que 6 multiplié par 4, c'est autant que 6 fois 4. Il ne nous semble pas nécessaire de s'étendre longuement là dessus, la propriété essentielle a déjà été travaillée quand on utilisait le terme "fois". Il s'agit simplement que les élèves comprennent que quand ils rencontrent "7 multiplié par 10" ils peuvent penser, comme ils le veulent (ou plutôt comme c'est plus commode pour ce qu'on veut faire) 7 fois 10 ou 10 fois 7.
A compter de ce moment, on utilisera a priori indifféremment les quatre expressions possibles d'un produit. Cependant, il restera nécessaire de rappeler fréquemment que si la valeur est toujours la même, penser le calcul d'une façon ou de l'autre peut le rendre plus facile. Si je pense dix fois sept (7 + 7 + 7…) ça parait bien mystérieux. Si je pense sept fois dix, c'est à dire 7 dizaines, la connaissance du système décimal permet d'écrire immédiatement le résultat.