LA MATHÉMATIQUE A L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE

ASSOCIATION
DES PROFESSEURS
DE MATHEMATIQUES
DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC
PARIS 1972

LA MATHÉMATIQUE A L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE

SOMMAIRE

[1] [-47-] indique la fin de la page 47 dans l'édition de 1972.

1
INTRODUCTION

1.1 *Enseigner, c'est apprendre encore... et encore*
par Maurice GLAYMANN

Dès que vous ouvrirez ce livre, vous constaterez que ce n'est pas un livre comme les autres[2]. Conforme à notre devise *"de la Maternelle à l'Université"*, il est le fruit des travaux de quarante Collègues de l'A.P.M.E.P. : maîtres de l'École Élémentaire, I.D.E.N., professeurs des Enseignements Secondaire et Supérieur ; tous ces maîtres ont participé depuis des années à une recherche fondamentale sur l'enseignement de la mathématique à l'École Élémentaire.

Enseigner la mathématique à ce niveau n'est pas une tâche aisée : même autrefois, lorsque cet enseignement était uniquement limité à *l'apprentissage du calcul*, il exigeait de la part du maître un effort considérable, et, il faut bien le dire, cet effort n'était pas toujours payant. Certes, la plupart des enfants quittaient l'école en sachant à peu près compter, mais ce savoir reposait trop souvent sur de simples mécanismes ; ils arrivaient à résoudre certains problèmes classiques, du moins ceux qui restaient dans un cadre bien limité et où aucun piège n'avait été tendu ; en fait, il était toujours question de les fonder sur du concret quotidien, et je me souviens que lorsque j'étais petit, ma maîtresse, dont je garde par ailleurs le meilleur souvenir, me demanda un jour de calculer la longueur du mur de sa cuisine connaissant sa largeur et son aire ; cette dernière avait été déterminée à l'aide de pots de peinture qui lui avaient permis d'enduire sa surface... Si je n'avais été à l'époque un enfant bien sage et [-5-] docile, j'aurais peut-être demandé à ma maîtresse si elle était capable de déposer sur son mur une couche de peinture *uniforme* et si ce travail avait vraiment nécessité un *"nombre exact"* de pots de peinture ! Elle m'avait aussi appris à résoudre des problèmes en faisant de *fausses suppositions*, et un autre jour, elle nous avait parlé d'un fermier qui avait des poules et des lapins et qui pour trouver le nombre de ses poules faisait l'hypothèse que ses animaux avaient le même nombre de pattes... Bien sûr, tout cela est du passé et il y a bien longtemps que les petits enfants n'ont plus de tels problèmes à résoudre.

En effet, depuis une dizaine d'années, il s'est produit une profonde modification des méthodes et des contenus. Les maîtres se sont rendu compte que la seule maîtrise du calcul est insuffisante. Le rôle de l'École ne peut plus aujourd'hui se limiter à apprendre aux enfants à lire, à écrire et à compter ; il faut aller au-delà de ces tâches ; les recherches entreprises dans notre pays et à l'étranger par de nombreuses équipes prouvent qu'un enseignement rénové de la mathématique à l'École Élémentaire permet d'entreprendre une mutation fondamentale, allant d'une part dans le sens d'une véritable démocratisation et d'autre part dans celui d'une compréhension bien meilleure par l'enfant des concepts de base.

Les Programmes de 1970 constituent une première étape de cette évolution ; mais, pour qu'un changement plus efficace se produise, il est dès à présent nécessaire de résoudre le problème crucial **de la formation permanente des maîtres de l'École Élémentaire.**

Cette tâche impérative incombe au Ministère de l'Éducation Nationale.

Jusqu'à ces dernières années, un maître pouvait enseigner grâce à ses connaissances acquises au cours de sa formation initiale. Or, notre civilisation est caractérisée par le *progrès permanent*, notre monde est en constante évolution et cela dans tous les domaines ; il n'est plus possible désormais à un enseignement d'avoir la position, ô combien confortable, du magister qui savait tout ! ... Enseigner c'est apprendre (à prendre ou à laisser) ; la situation est irréversible ; plus personne ne peut changer cet état de fait. Mais seule la formation permanente pourra permettre à nous tous de continuer à assurer notre fonction d'enseignant avec efficacité.

Ce livre a justement pour but de contribuer à cette formation ; c'est une nouvelle étape de notre action. Nous avons choisi ce métier, parce que nous aimons les enfants et que nous savons que notre métier joue un rôle primordial dans notre société.

---

[2] Que l'on me permette ici de remercier l'équipe de l'Imprimerie Vaudrey, qui en moins de deux mois a réalisé la performance de composer entièrement et d'imprimer cet ouvrage d'un volume très important.

Voilà pourquoi nous voulons tous ensemble aller de l'avant et réaffirmer avec Danton *"après le pain, l'éducation est le premier besoin d'un peuple..."*. [-6-]

*

*   *

1.2 *Comprenons-nous bien*

par L. DUVERT

Lors de la mise en chantier de cette brochure consacrée à l'Ecole Elémentaire, la Rédaction souhaitait, pour faciliter la tâche des lecteurs, un effort d'unification du vocabulaire employé dans les divers articles qu'il contiendrait.

Madame ROBERT a partagé ce souci ; elle nous a écrit :

"*Je crois, comme vous, qu'au sein d'un Bulletin, il faut adopter un même vocabulaire, en le précisant au début pour que ce soit clair. Le choix m'importe peu, pourvu qu'on sache bien de quoi on parle. Et je suis toute prête à employer celui de l'A.P.M.*".

BROUSSEAU a adopté la même attitude.

Nous les remercions vivement d'avoir accepté de changer certains termes de leurs articles.

Nous précisons ci-dessous quelques-unes des positions adoptées par le Dictionnaire de l'A.P.M. ; nous ajoutons quelques réflexions personnelles sur des mots dont il ne s'est pas encore occupé.

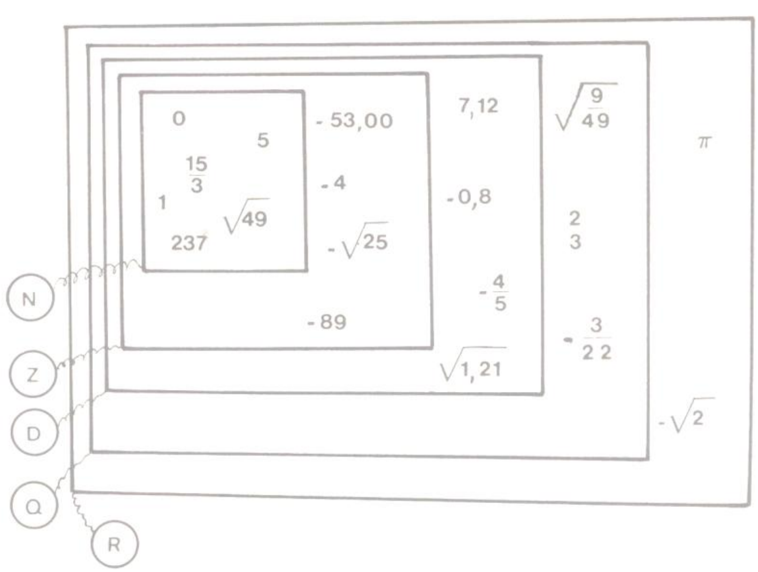
Nous espérons qu'ainsi les lecteurs de cette Brochure ne seront pas rebutés par des difficultés de vocabulaire ; leurs remarques à ce sujet seront bien entendu les bienvenues.

Nous nous proposons de poursuivre le même but dans les numéros du Bulletin de l'A.P.M., grâce à la volonté de coopération de ceux qui y écriront.

Dans le Dictionnaire de l'A.P.M.

1° Ensemble des *naturels* (zéro compris) : **N**
Ensemble des *entiers :* **Z**
Ensemble des *décimaux :* **D**
Ensemble des *rationnels :* **Q**
Ensemble des *réels :* **R**
Ensemble des *complexes :* **C**

N est inclus dans **Z ; Z** est inclus dans **D ; D** est inclus dans **Q ; Q** est inclus dans **R ; R** est inclus dans **C**. [-7-]



2° Notice OPERATION

"Loi de composition interne dans N" signifie *"application de N × N vers N"*

"Opération interne dans N" signifie *"application d'une partie de N × N* (qui peut être éventuellement N × N lui-même) *vers N*".

Toute loi de composition interne est une opération interne. Mais il existe des opérations internes qui ne sont pas des lois de composition internes.

Exemples : dans N :

L'addition, la soustraction, la multiplication, la division, sont quatre opérations internes dans N.

L'addition et la multiplication sont deux lois de composition internes dans N ; ce n'est le cas ni de la soustraction, ni de la division dans N.

(La soustraction dans Z, elle, est une loi de composition interne dans Z).

3° OPERATEUR

A l'école élémentaire, ce mot signifie le plus souvent "application d'un ensemble vers lui-même", l'ensemble étant par exemple N, ou l'ensemble des blocs logiques,...

Exemple : l'opérateur dans N "additionner 3" est l'application de N vers N qui à tout naturel x fait correspondre le naturel $x + 3$.

Ne pas confondre avec OPERATION (voir plus haut). [-8-]

4° QUOTIENT. Soit a un naturel, b un naturel non nul.

a) S'il existe un naturel c tel que a = bc, c s'appelle "quotient de a par b" (de préférence à "quotient exact", qui présente l'inconvénient de laisser entendre qu'il existe un quotient inexact ! ...) et se note a : b ou $\frac{a}{b}$.

b) Il existe toujours un et un seul couple de naturels (q,r) tel que :

a = bq + r   et   r < b

q est le *"quotient euclidien"* de a par b (de préférence à *"quotient entier" :* $\frac{12,4}{3,1}$ est un quotient entier qui n'est pas euclidien).

r est le *"reste"* de a par b.

Déterminer le couple (q,r) connaissant le couple (a,b), c'est effectuer la *"division euclidienne de a par b"*.

q se note quelquefois a ÷ b

Il n'existe pas de symbole spécial pour le reste.

Si r = 0 , q est le quotient de a par b.

c) Exemples : 15 : 5 =3 $\frac{15}{5} = 3$ $16 \div 5 = 3$ $15 \div 5 = 3$

16 : 3 n'est pas un naturel

d) Le quotient de a par b, quand il existe, est le résultat de l'opération interne dans N dite "division", dont il est question dans le 1°. La division euclidienne, elle, n'est pas une opération interne dans N.

Autres remarques

<u>1°</u> *Représentations d'une relation binaire.* Les deux plus employées sont la représentation sagittale (ou "fléchée") et la représentation cartésienne (à cases, ou à nœuds).

Dans les deux cas, au lieu de "représentation", on emploie aussi "schéma", "diagramme",... Certains auteurs spécialisent chacun de ces deux vocables :

"schéma" (sagittal, cartésien) pour représenter une relation binaire ;

"diagramme" (de Venn, de Carroll,...) pour représenter un ensemble et certaines de ses parties.

Le mot "graphe" pose un problème plus délicat :

a)Le graphe d'une relation binaire R de source A et de but B est [-9-] l'ensemble des couples (x,y) tels que xRy. C'est une partie du produit cartésien A×B. Voir aussi un emploi plus général dans l'article de J. CHEVALLIER, page 11.

b)"Graphe" est parfois employé au sens de "schéma sagittal" (exemple : PAPY, Mathématique moderne **I).**

c)"Graphe" signifie parfois "représentation graphique" (autrement dit "courbe représentative") d'une fonction de **R** vers **R.** Les deux sens b) et c) ne sont que des extensions de a), abusives, où l'on passe de l'objet mathématique à ses représentations visuelles (une flèche, un point du plan, sont des représentations conventionnelles d'un couple). En revanche, le sens suivant est indépendant du sens a) :

d)La "théorie des graphes", ou "analysis situs", est une partie de la topologie.

Pour éviter toute ambiguïté, nous avons supprimé, sans nuire à la compréhension du texte, le mot "graphe" quand il était employé dans un sens autre que le sens a) ; nous nous en excusons auprès des auteurs.

2° Dans une table, un tableau, les *rangées* sont de deux sortes : les *lignes* (rangées "horizontales") et les *colonnes* (rangées "verticales").

3° Le mot *"solution"*, en mathématique, désigne un élément vérifiant une équation.

Exemple : les solutions de l'équation dans **Z** "$x^2 - 1 = 0$" sont 1 et — 1.

Il serait préférable de ne pas l'employer dans le sens de "résolution" d'un problème, ou de "rédaction de la réponse" à un problème, ou de "méthode" ("première, deuxième méthodes" plutôt que "première, deuxième solutions"). [-10-]

*

* *

1.3 *Ayez donc de belles relations...*

par J. -M. CHEVALLIER

Dans le numéro spécial 269-270 consacré à la classe de sixième, Madame TOUYAROT avait fait un recensement soigneux des sens donnés au mot *relation.* Elle n'avait pas cherché à épuiser un tel sujet ; en le reprenant, je n'ai ni l'intention de "rewriter" son article, qui reste une excellente source, ni l'ambition assez vaine de conclure un tel débat — tout au plus celle de maintenir ouvertes des portes que Madame TOUYAROT jugeait déjà enfoncées ! D'autre part, il s'agit à présent non de Sixième, mais du premier degré, ce qui rend le problème encore plus délicat, et mon incompétence encore plus profonde. Et pourtant il faudrait bien qu'on arrive à savoir à peu près ce qu'on met dans cette idée de "relation", obscurcie par tant d'usages divers et parfois contradictoires.

Je révère comme tout un chacun la grande construction bourbakiste qu'on peut — si on le souhaite — tenir pour purement syntaxique, à l'exclusion de toute interprétation "sémantique". A un certain niveau, où les règles du jeu sont très bien définies et très bien appliquées, rien de plus légitime. Au niveau élémentaire (et l'élémentaire dure longtemps !), on ne saurait certes proscrire tout "jeu formel", car il peut avoir de l'attirance pour certains esprits, mais ce serait une gageure de s'y adonner constamment et totalement. Donc, même si la portée du mot *relation* doit s'en trouver réduite, la sagesse commande probablement de se borner au départ à un point de vue ensembliste, en convenant qu'on ne sortira pas d'un certain "univers".

Cependant, même ainsi, il y a un cas où l'on ne peut éviter de faire du "formalisme" : sans le dire sans doute, voire sans s'en rendre compte, car c'est le cas qui passe pour le plus simple, j'ai nommé la "relation d'égalité". Dans l'univers — ou dans n'importe quel ensemble — elle ne saurait être autre chose que la bijection identique, $x \mapsto x$, dont l'intérêt n'est pas niable, mais qui est loin d'épuiser le contenu du concept d'égalité. Cela parce que *l'égalité est une relation linguistique et non une relation mathématique,* qui porte sur des *noms* et non sur des "objets". Écrire a = a', cela signifie : syntaxiquement, que toute formule telle que "abc..." peut être valablement remplacée par "a'bc..." ; sémantiquement, que "'a" et "a' sont des noms synonymes désignant le même objet sans être eux-mêmes l'objet. Mais, dira-t-on, c'est la même chose avec $a < b$, *a* et *b* n'y sont que des noms ! Oui, mais les objets nommés *a* ou *b* pourraient être désignés dans la formule par n'importe quel autre de leurs noms *a'* ou *b',* [-11-] donc finalement cette formule donne une information *sur les objets* par l'intermédiaire de leurs noms. Tandis que, si je dis que "l'égalité subsiste quand on y remplace le nom d'un objet — ou plutôt *de l'objet* — par un synonyme", j'énonce l'axiome de transitivité pour l'égalité, mais certainement pas une propriété de l'objet. Cela n'est pas une difficulté mineure, et il vaut mieux qu'on en soit conscient à tous les niveaux.

Revenons aux relations proprement mathématiques. Pour celles-ci, à vouloir aller trop loin et trop tôt dans l'abstraction, on arrive à peu près immanquablement à identifier "relation" et "lien verbal" ; je pense que c'est grave pour la suite (à moins de chambarder une fois de plus le vocabulaire, bien sûr). Si l'on habitue les gens dès le jeune âge à dire que "... est frère de..." est une relation, que pourront-ils répondre le jour où on leur demandera si cette relation est symétrique ou non ? Rien, tant qu'on n'aura pas précisé s'il y a uniquement des garçons, ou à la rigueur des filles sans frère, ou si au contraire l'un des lascars a amené sa petite sœur. Autant dire que la prétendue relation n *'est pas définie.*

Apparemment plus "concrète" est la relation considérée comme ensemble de couples { (Jean,Pierre), (Pierre,Jean), (Michel,Anne) } par exemple semble remplacer avantageusement le lien verbal "...est frère de...", du moins aussi longtemps qu'on ne pose pas de question indiscrète sur la relation complémentaire (celle qui aurait pour lien verbal "...n'est pas frère de..."). Assurément il est facile de former un ensemble de treize couples : (Michel,Jean), (Anne,Michel), (Pierre, Pierre),... qui est *inclus* dans l'ensemble cherché, mais c'est tout ; s'il y avait dans le tas un fils unique ou bien deux sœurs, comment le saurait-on ? Comme on le voit, la critique n'est pas foncièrement autre que dans le premier cas ; d'ailleurs la seule différence est qu'on a remplacé la définition "en compréhension" d'un certain ensemble, le *graphe*, par sa définition "en extension". Assimiler la relation soit au "lien verbal", soit au "graphe" est toujours un danger si l'on n'a pas précisé de façon explicite sur quel ensemble (ou quels ensembles) on travaille.

Un autre écueil, moins grave dans sa nature, mais propre à créer de fâcheuses habitudes d'esprit, consiste à ne jamais parler que de couples, comme si toutes les relations étaient binaires ! C'est un peu comme si l'on n'appelait équations que celles qui sont "à deux inconnues". Incontestablement les relations binaires ont une importance qu'il ne faut pas sous-estimer : elle est d'ailleurs suffisante pour qu'on leur ait attribué le nom particulier de *correspondances* ; mais à quoi bon, si c'est pour employer indifféremment les deux mots ? [-12-]

Je crois qu'il faudrait s'en tenir aux choses qui sont à la fois les plus simples et les plus fondamentales. Dans un ensemble *donné* d'adultes et d'enfants, "...est frère de Paul" définit déjà une relation, plus simple que la relation "... est frère de ...", laquelle à son tour est plus simple que la relation "... a pour père ... et pour mère ...". Mais toutes les trois sont des relations, et seule la seconde est une correspondance (la troisième en deviendrait une si l'on associait à l'enfant le *couple* de ses parents).

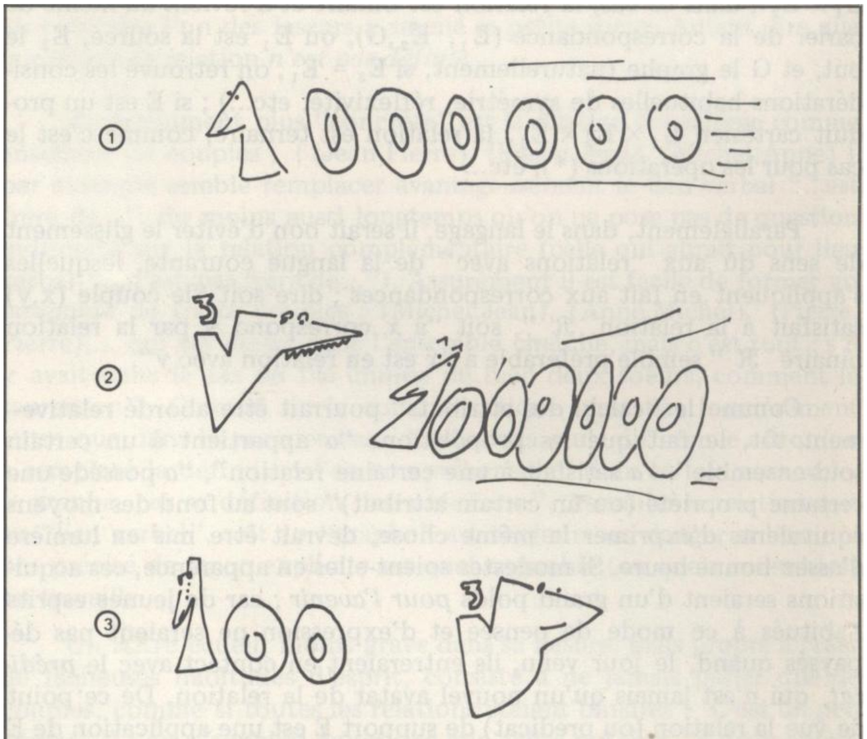
Il apparaît là-dessus que c'est le couple (E,G) formé par un ensemble E et un sous-ensemble G de E qui définit de la façon la plus naturelle la *relation de support E et de graphe* G, les éléments de G "vérifiant" la relation alors que ceux du sous-ensemble complémentaire "ne la vérifient pas". Cet aspect est assez général pour englober tous les cas où l'on parle de relation au sens ensembliste : car rien n'oblige, mais rien n'empêche non plus E d'être un produit cartésien $E_1 \times E_2$; dans ce cas, la relation est binaire et il revient au même de parler de la correspondance (E_1, E_2, G), où E_1 est la source, E_2 le but, et G le graphe (naturellement, si $E_2 = \mathbf{E_1}$ on retrouve les considérations habituelles de symétrie, réflexivité, etc...) ; si E est un produit cartésien $E_1 \times E_2 \times E_3$, la relation est ternaire, comme c'est le cas pour les opérations[3], etc...

Parallèlement, dans le langage, il serait bon d'éviter le glissement de sens dû aux "relations avec" de la langue courante, lesquelles s'appliquent en fait aux correspondances ; dire soit "le couple (x,y) satisfait à la relation R ", soit "à x correspond y par la relation binaire R " semble préférable à "x est en relation avec y".

Comme le "calcul des attributs" pourrait être abordé relativement tôt, le fait que les propositions "a appartient à un certain sous-ensemble", "a satisfait à une certaine relation", "a possède une certaine propriété (ou un certain attribut)" sont au fond des moyens équivalents d'exprimer la même chose, devrait être mis en lumière d'assez bonne heure. Si modestes soient-elles en apparence, ces acquisitions seraient d'un grand poids *pour l'avenir ;* car de jeunes esprits habitués à ce mode de pensée et d'expression ne seraient pas dépaysés quand, le jour venu, ils entreraient en contact avec le *prédicat*, qui n'est jamais qu'un nouvel avatar de la relation. De ce point de vue la relation (ou prédicat) de support E est une application de E [-13-] dans {Vrai,Faux}, et son graphe G est l'image réciproque de {Vrai} . Un tel gain serait considérable, quand on constate les difficultés encore provoquées par ce que l'on continue d'appeler "la relation $y = x^2$" ; si l'une des lettres au moins est une variable muette (qu'en général on n'a pas pris la peine de mutifier !), la prétendue relation n'est rien de plus qu'un lien verbal, et est tout aussi peu signifiante que lui d'où les questions sans fin qu'on se pose. Tandis que, si l'on considère les relations, de supports respectifs R, R, R^2 , R^3 , $x \mapsto (y=x^2)$, $y \mapsto (y=x^2)$, $(x,y) \mapsto (y=x^2)$, $(x,y,z) \mapsto (y=x^2)$, il est immédiat que leurs graphes respectifs sont : $\{-\sqrt{y}, \sqrt{y}\}$ (dans le cas $y > 0$), $\{x^2\}$, une parabole, un cylindre parabolique.

Quand on a de si belles relations, c'est pour s'en servir !

[3] Une *opération*, au sens le plus général, est définie par le Dictionnaire de l'A.P.M. comme une application d'une partie de E_1 X E_2 vers E_3.



Promenade tragique

Nous devons ce dessin et ceux des pages 82 et 142 à notre collègue M. Bibard, Lycée l'Emperi, Salon-de-Provence. [-14-]

2
RÉFLEXIONS SUR LE PROGRAMME RÉNOVÉ

2.1 Un nouvel état d'esprit
par Marguerite ROBERT - Chambéry

Les programmes de 1970 sont dits : "programmes provisoires", "programmes transitoires". Quel est le sens de ces expressions ?

1) Ce ne sont pas de nouveaux programmes, ce sont les anciens programmes allégés de toute une partie devenue inutile, sinon nocive. Ils sont donc provisoires puisqu'ils appellent d'autres programmes, des programmes "modernes". Ils permettent d'attendre que le recyclage des maîtres soit organisé dans l'ensemble de la France afin de leur donner la formation nécessaire pour enseigner de nouvelles notions.

2) Les commentaires invitent les maîtres à présenter ces programmes, dont la forme reste traditionnelle, dans une optique toute différente de celle préconisée officiellement jusqu'en 1970. Ce sont donc des programmes transitoires qui peuvent et qui devraient engendrer dès à présent une véritable mutation de l'enseignement élémentaire des mathématiques.

Mais une telle mutation est-elle possible actuellement, alors que la majorité des maîtres n'est ni recyclée, ni encadrée ? Que beaucoup d'entre eux n'ont que des notions fragiles et souvent approximatives d'ensemble, de relation d'un ensemble vers un autre, de loi de composition, si bien qu'à l'usage, elles risquent d'engendrer des confusions, des erreurs, ou tout simplement de tourner court ? [-15-] Précisons tout de suite que les programmes de 1970 n'exigent pas la mise en jeu de telles notions.

Mais alors quelle mutation peuvent-ils donc engendrer dans l'enseignement ? Peut-on demander aux maîtres d'enseigner des notions traditionnelles autrement qu'ils ne le faisaient, sans pour autant faire appel aux notions fondamentales des mathématiques "modernes" ? C'est ce que nous nous proposons d'étudier.

Les programmes de 1970 distinguent nettement et fort heureusement trois parties. La première est la seule partie mathématique du programme. Elle est d'ailleurs désignée par "*éléments de mathématique*".

Quel est donc le contenu mathématique de l'enseignement donné actuellement dans le cycle élémentaire ? Il reste numérique, c'est l'étude de N, c'est-à-dire des nombres naturels. L'enseignement élémentaire ne sort pas de N *: les nombres à virgule ne sont que des naturels écrits conventionnellement sous forme différente*; quant aux "fractions", elles ne sont pas des nombres rationnels. Les commentaires les présentent comme des "opérateurs", sans que le sens de ce mot, qui prête à confusion, soit bien défini. Il semble qu'elles soient des indicateurs de procédés permettant de passer d'une liste de naturels à une autre à l'aide de la multiplication et de la division dans N.

Notre programme de mathématique est donc bien délimité : les naturels, la question de leur écriture, l'étude des quatre opérations fondamentales dans N, c'est-à-dire l'addition et la multiplication, deux opérations point trop mauvaises, et celles qui leur sont associées, la soustraction et la division, beaucoup plus imparfaites car ce ne sont pas des lois de composition internes.

L'enseignement élémentaire reste donc, provisoirement, on ne peut plus traditionnel dans son contenu. L'école primaire a toujours eu pour objectif d'enseigner les "quatre opérations". En quoi le provisoire peut-il bien être transitoire ?

En fait, c'est bien là qu'est demandée aux maîtres une mutation radicale, qui exigera d'eux de grands efforts de vigilance, de surveillance d'eux-mêmes, une véritable conversion intellectuelle.

Car les naturels ne sont plus liés à la mesure des objets du monde physique et, surtout, les opérations sur les naturels ne sont plus tirées des opérations sur les "grandeurs" du monde physique ou de l'univers quotidien telles que longueurs, poids, prix, capacités. [-16-]

L'abandon des "opérations sur les grandeurs" est bien la mutation fondamentale apportée par les programmes transitoires, c'est lui qui transforme profondément les démarches de la pensée dans l'enseignement élémentaire.

1) Les naturels

Au départ, rien ne paraît changé. On a toujours présenté les naturels à partir de collections d'objets. Même si on remplace le mot de collection par celui d'ensemble, le sens reste le même.

Mais déjà nous voyons que les objets de l'ensemble doivent être distincts, qu'ils n'ont pas à être tous "pareils", "de même nature", et qu'il est souhaitable d'utiliser des ensembles d'objets bien différents et point trop intéressants affectivement.

D'autre part, on ne peut plus étudier chaque naturel comme somme ou produit de naturels, étudier ses "décompositions", car ces notions ainsi que celles de différence ou quotient seront abordées par étapes.

L'écriture des naturels était liée à l'étude du système métrique : 312 cm était la longueur obtenue en mettant bout à bout 3 m, 1 dm, 2 cm. Il faut abandonner cette démarche, partir d'une collection d'objets, faire des groupements par 3, 5, 10,..., des groupements de ces groupements pour obtenir l'écriture du naturel dans un système de numération de position à base trois, cinq, dix...

Même si ce procédé est inhabituel à l'école élémentaire, il n'a rien à voir, bien que l'on croie souvent le contraire, avec les "mathématiques modernes". Il n'apporte aucun changement véritable, il fait simplement comprendre ce qu'est une numération de position et permet de mieux référer notre système décimal.

Toutefois il apporte aux instituteurs deux thèmes de réflexion importants:

a) Il faut bien distinguer le nombre de son écriture. Le naturel que nous appelons "douze" n'est pas lié à une écriture. Historiquement d'ailleurs, il en a eu de nombreuses. Pour nous limiter aux systèmes de numération de position, "douze" s'écrit :

22 en base cinq
110 en base trois
20 en base six
12 en base dix [-17-]
L'écriture 10 désigne toujours la base du système adopté : six en base six, douze en base douze...

b) Les diverses écritures d'un nombre permettent d'utiliser le. signe " = " dans son sens mathématique, alors que l'enseignement traditionnel a faussé le sens de ce signe. Nous reviendrons sur cette question. Mais attachons-nous dès maintenant à ne placer ce signe qu'entre deux écritures d'un même nombre:

$22^{(5)} = 110^{(3)}$ $\qquad$ $20^{(6)} = 12$
$22^{(5)} = 20^{(6)}$ $\qquad$ $12=12$

Toutes ces égalités se lisent : douze = douze

Les instituteurs sont habitués à faire, à faux, du signe " = " un signe opératoire. Il leur est donc demandé de s'habituer à l'idée que ce signe ne "fait" rien, ne "transforme" rien, "n'agit" pas.

2) L'addition dans N

Il semble que là encore, il n'y ait pas grand changement : il s'agit, comme toujours, de réunir des collections d'objets.

Cependant souvenons-nous, pour l'oublier définitivement, de l'ancienne règle : "on n'ajoute que des grandeurs de même nature", c'est-à-dire des pommes à des pommes, un poids à un poids, une longueur à une longueur. Et sachons bien que le mot "grandeur" n'a pas de sens mathématique, qu'il ne figure donc pas dans cette partie du programme.

Utilisons le système décimal de numération.

En réunissant une collection de 3 objets quelconques à une collection de 5 objets distincts des précédents, on obtient une collection de 8 objets, quels que soient ces objets.

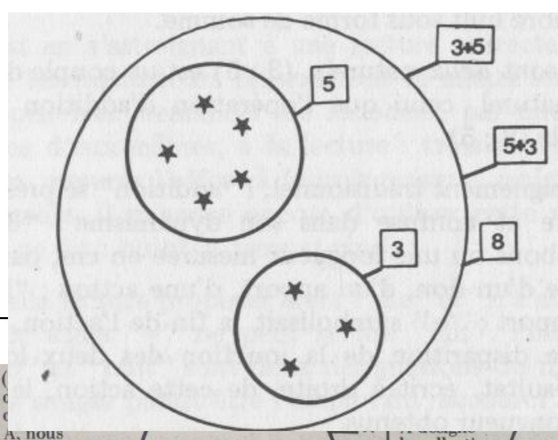
Cette situation nous donne deux nouvelles écritures du naturel 8

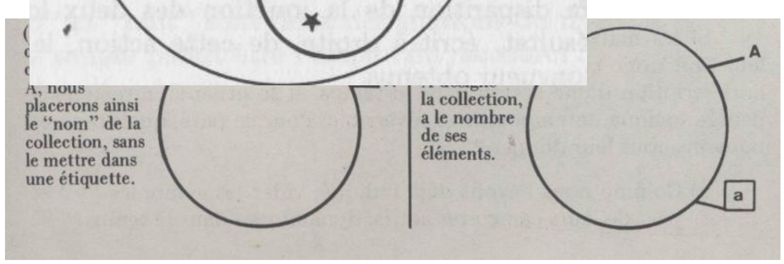
5+ 3
et 3 + 5 [-18-]

Nous pouvons donc utiliser le signe "=" et écrire

$8=5+3$ $\qquad$ $5+3=8$
$8=3+5$ $\qquad$ $3+5=8$
$3+5=5+3$ $\qquad$ $5+3=3+5$

Nous pouvons aussi faire le dessin, en désignant par des croix des objets distincts, et en mettant dans des étiquettes le nombre des objets des collections[4].





4

Avec un tel dessin, on ne peut mettre le signe "=" qu'entre les contenus de deux étiquettes accrochées au même contour.

Le vocabulaire fait souvent question pour les maîtres : ils se demandent s'il ne faut pas tout simplement remplacer le mot "addition" par celui de "somme". Distinguons donc bien ces notions, car préciser le vocabulaire c'est préciser la pensée en s'astreignant à n'utiliser que le terme juste.

L'addition des naturels est une "opération" dans N qui, à tout couple de naturels tel que (3 ; 5), fait correspondre un composé, ici 3 + 5, appelé somme de naturels.

La *somme* 3 + 5 est donc le composé, par l'opération *d'addition*, des termes du couple (3 ; 5) comme la *différence* 5 - 2 sera le [-19-] composé par l'opération de *soustraction* des termes du couple (5 ; 2), comme le *produit* 5 × 2 sera le composé par l'opération de *multiplication* des termes du couple (5 ; 2), et comme le *quotient* 6 : 2 sera le composé, par l'opération de *division*, des termes du couple (6 ; 2).

3 + 5 n'est donc pas une addition ! Il faut enlever à cette écriture tout son caractère dynamique sous-jacent dans l'enseignement traditionnel. Elle n'indique pas une "action" à réaliser. Elle n'est pas davantage un "résultat", le résultat d'une action. C'est une écriture du nombre huit sous forme de somme.

"3", "5", sont *deux* naturels, (3 ; 5) est *un* couple de naturels ; 3 + 5 est *un* naturel, celui que l'opération d'addition fait correspondre au couple (3 ; 5).

Dans l'enseignement traditionnel, "l'addition" se présentait sous forme complexe et confuse dans son dynamisme : "3" était un nombre de bonbons ou une longueur mesurée en cm, par exemple ; "+ ", le symbole d'un don, d'un apport, d'une action ; "5" notait le contenu de l'apport ; "=" symbolisait la fin de l'action, le brassage des bonbons, la disparition de la jonction des deux longueurs et annonçait le résultat, écrit à droite, de cette action, le paquet de bonbons ou la longueur obtenus.

Une action se déroule dans le temps, et le temps n'est pas réversible, d'où le caractère irréversible qu'avait le signe " = ", et celui de l'écriture 3 + 5 = 8 puisque "3" est l'état initial, "5" l'état qui suit chronologiquement, et "8" l'état final. Nous avons toujours constaté que les enfants qui avaient compris, au sens que nous venons de décrire, l'écriture 3 + 5 = 8, refusaient d'écrire 8 = 3 + 5.

Une image, même approximative, nous fera mieux comprendre l'aspect dynamique et temporel, donc irréversible, d'une telle notion. Supposons que "3" désigne de la farine, et "5" des œufs, "+" nous indique alors qu'il faut mélanger le tout en une pâte, "=" est le passage de cette pâte dans le four de la cuisinière, "8" le gâteau qui en sort. Impossible, en mettant le gâteau dans le four, d'obtenir la pâte et encore moins la farine et les œufs !

Si les maîtres veulent "mathématiser" la notion d'addition, ils leur faut donc changer radicalement leur mode de pensée, renoncer à la description d'une action dans le temps, et se situer au niveau de la pensée logique, intemporelle et réversible. Pour ce faire, quels repères pouvons-nous leur donner ?

a) Comme nous l'avons déjà indiqué, vider les symboles "=" et "+" de leurs caractères actifs, dynamiques dans le temps.[-20-]

Dans l'enseignement élémentaire défini par les programmes de 1970, le signe "=" ne se rencontre qu'entre deux écritures d'un même naturel. 3 + 5 est une écriture de huit, 8 en est une autre écriture. Nous obtenons donc:

3 + 5 = 8 ou 8 = 3 + 5

Le signe " + " fait tout simplement partie de certaines écritures d'un naturel. Ces écritures ont la forme de "somme".

C'est en s'astreignant à une lecture correcte de ces égalités que les instituteurs réformeront le mieux leur pensée. Nous devons leur demander de renoncer, par une stricte surveillance d'eux-mêmes, à la lecture : *trois et cinq font huit*. Je peux mesurer l'effort à fournir puisque, malgré des années de contrôle, il m'arrive encore d'utiliser cette expression. Mais nul ne dit : huit fait trois et cinq.

Quelle lecture proposer alors ? Le "et" n'a aucun sens précis, et le signe "=" ne peut se lire "fait". Puisque "trois plus cinq" et "huit" sont deux désignations du même nombre, le plus simple paraît être l'emploi du raccourci : trois plus cinq, c'est huit - comme nous dirions : la plus petite de la classe, c'est Brigitte.

Bien entendu la lecture : trois plus cinq égale huit reste la lecture classique, mais elle n'impose pas aux maîtres le même effort de redressement de la pensée.

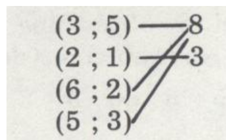
Et nous continuerons de dire, dans le langage courant, "deux et deux font quatre" pour exprimer un modèle de certitude !

b) Remplacer le dynamisme dans le temps par un dynamisme de type logique, c'est-à-dire par la notion de correspondance entre une liste de couples de naturels et une liste de naturels. Ainsi

(3 ; 5) → 3 + 5 qui se lit trois plus cinq ou huit
(2 ; 1) → 2 + 1 qui se lit deux plus un ou trois
(6 ; 2) → 6 + 2 qui se lit six plus deux ou huit
(5 ; 3) → 5 + 3 qui se lit cinq plus trois ou huit

Remarquons bien que le dynamisme logique n'est pas dans le signe "+", mais dans le passage du couple (3 ; 5) à son "image" 3 + 5 par la loi d'addition.

Le naturel huit figure plusieurs fois dans la liste de droite. Lorsque les écritures sous forme de sommes auront été identifiées [-21-], rien n'empêche de l'écrire de la façon la plus simple et immédiatement reconnaissable, c'est-à-dire : 8.



Nous comprenons mieux, sous cette forme, ce qu'est l'addition, car nous pouvons la décrire à partir de trois constituants:

l'ensemble de tous les couples de naturels, première liste
l'ensemble de tous les naturels, seconde liste
l'ensemble de tous les traits qui relient un couple à son image, c'est-à-dire au composé de ses deux termes par cette loi.

c) Évacuer le dynamisme dans le temps dans la présentation de la notion de somme, c'est-à-dire dans la réunion de deux collections en une seule. Présenter cette réunion "à plat" et non comme une activité fabricatrice.

Deux collections d'objets distincts sont déposées sur la table :

ou je regarde ces deux collections, ce qui ne suppose pas un ordre entre elles. L'ordre n'est nécessaire que pour en parler, car le discours se déroule dans le temps et je dirai que l'une est une collection de trois objets, l'autre de cinq.

ou je regarde la collection de tous les objets. Elle en comporte huit.

Cette situation, avec cette double façon de voir, me permettra d'écrire huit sous les deux formes, dites sommes

3 + 5
5 + 3

et il en sera ainsi chaque fois que je rencontrerai une telle situation. C'est celle que nous avons représentée par le dessin précédent.

Dans cette perspective il n'y a plus, à proprement parler, d'action qui se déroule dans le temps. Il s'agit, ici, d'une activité mentale qui permet de reconnaître un certain type de situation, celle où deux collections d'objets, tous distincts, sont réunies en une seule, celle qui engendre l'écriture d'un naturel sous forme de somme : le nombre des objets de la "grande" collection est la somme des nombres des objets des deux "petites".[-22-]

Remarquons, enfin, pour terminer cette longue étude des notions mises en jeu par l'écriture des naturels, que le mot d'addition est aussi utilisé dans le langage courant, où il n'a plus son sens mathématique, pour désigner une technique de calcul qui permet de passer, par exemple, de l'écriture 13 + 8 à l'écriture 21, plus simple ou plus avantageuse. On dit couramment qu'on "compte l'opération", qu'on "trouve le résultat". Mieux vaut éviter ces expressions fort contestables car, comme nous l'avons vu, elles sont à l'origine ou proviennent d'une confusion de pensée. Parlons simplement d'un procédé pratique nous permettant d'obtenir la somme des deux naturels 13 et 8.

3) La soustraction dans N

Dans l'enseignement traditionnel chaque "opération" se présentait avec son caractère propre, car elle correspondait à un certain type d'action matérielle distinct des autres. Alors que l'addition était liée à la notion d'apport, la soustraction dépendait de l'action d'ôter, d'enlever : j'ai 8 bonbons, j'en mange 3, il en reste 5. Encore fallait-il respecter la chronologie, donner l'état initial et le second état modifiant le premier pour que la différence soit liée à l'état final.

D'où la quasi-impossibilité, pour les débutants, de se repérer dans des questions de ce genre :

J'avais 5 bonbons, j'en ai 8, combien m'en a-t-on donné ?

ou

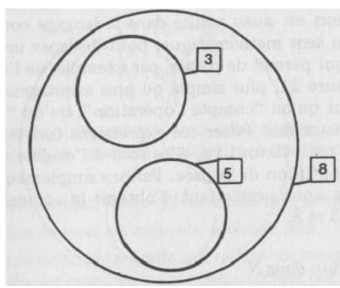
J'ai mangé 3 bonbons, j'en ai maintenant 5, combien en avais-je auparavant ?

En effet, dans le premier cas, il y a apport et le nombre cherché est une différence. Dans le second intervient l'action d'ôter et le nombre cherché est une somme. C'est que, dans les deux cas, la recherche ne porte pas sur l'état final, mais sur l'état initial ou le second état.

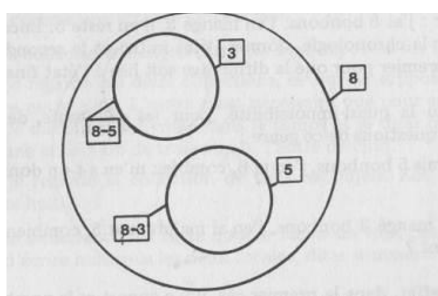
Nous retrouvons les difficultés et les confusions d'une pensée liée à un déroulement chronologique d'actions matérielles. Elle n'accède pas au plan logique et n'est pas réversible de ce fait.

Il faut donc que les maîtres opèrent la même conversion mentale que celle qui leur a été demandée pour l'addition. En réalité la première, si elle est solide, suffit, car la situation logique n'est autre que la précédente, il n'y a qu'un changement de notation.[-23-]

Prenons le dessin précédent de cette situation:



Cette fois-ci, au lieu de l'utiliser pour écrire huit sous forme de somme, nous l'utiliserons pour écrire cinq sous forme de différence 8 - 3, ou 3 sous la forme 8 - 5.

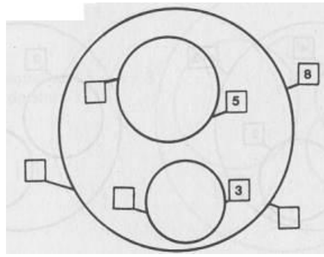


Et comme nous savons que le signe "=" se met entre deux écritures d'un même naturel, c'est-à-dire entre les contenus de deux étiquettes accrochées au même contour, nous écrirons

8-5 = 3   3 = 8-5
8-3 = 5   5=8-3

Finalement la situation de base, celle où deux collections de cinq et trois objets tous distincts sont réunies en une collection de huit objets, nous aura permis d'écrire d'abord le nombre des objets de la "grande" sous forme de deux sommes, puis celui de chacune des "petites" sous forme d'une différence.

On mesure l'importance de la maîtrise de ces notations. Un enfant doit pouvoir, sans hésiter, écrire le contenu des étiquettes en [-24-] blanc sur le dessin suivant :



Voici, entre bien d'autres, quelques exercices à proposer

a) Habiller le dessin précédent par une "histoire", telle que

Dans un vase il y a cinq roses et trois œillets. Il y a cinq plus trois (ou trois plus cinq) fleurs, c'est-à-dire huit fleurs.
Dans un vase il y a huit fleurs, des roses et des œillets. Il y a cinq roses et huit moins cinq œillets, c'est-à-dire trois œillets.

On peut aussi dire l'histoire ainsi

Dans un vase il y a x fleurs : cinq roses et trois œillets ; x, c'est cinq plus trois (ou trois plus cinq), c'est-à-dire huit.

$$x = 5 + 3$$
$$x = 8$$

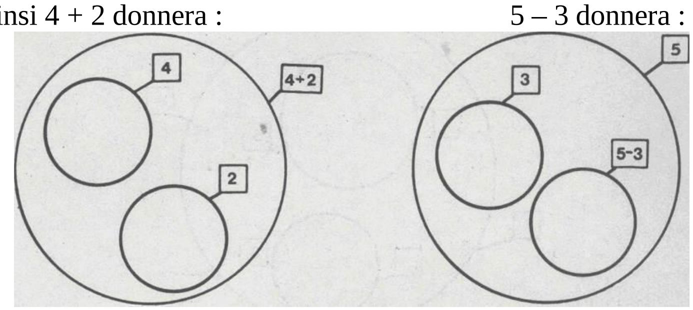
Dans un vase il y a huit fleurs, cinq roses et y œillets ; y, c'est huit moins cinq, c'est-à-dire trois.

$$y = 8 - 5$$
$$y = 3$$

Remarquons que 1"`histoire" ne se déroule pas dans le temps. Il s'agit bien de la description d'une situation "à plat". On n'y trouve ni apport, ni retrait.

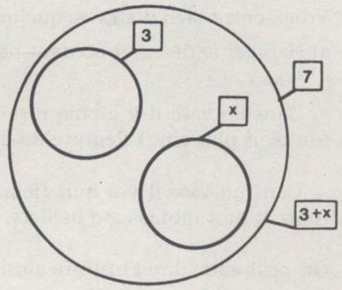
b) Donner un naturel écrit sous forme de somme ou de différence et demander le dessin correspondant [-25-].

Ainsi 4 + 2 donnera : 5 – 3 donnera :



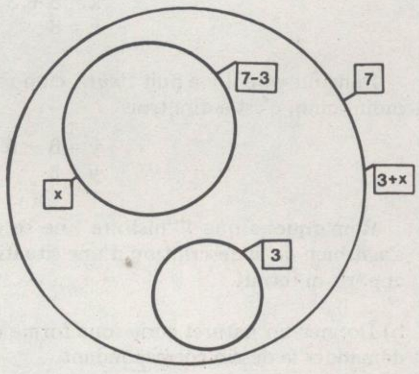
c) Proposer une "équation", la résoudre à l'aide du dessin correspondant.

Ainsi : $3 + x = 7$
donne le dessin :



qui permet d'écrire directement, en mettant les croix nécessaires dans les contours : $x = 4$

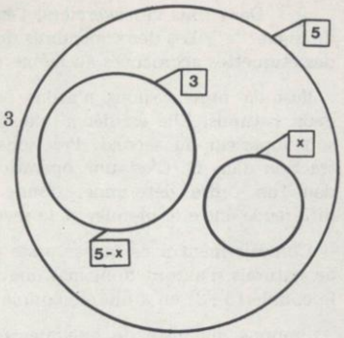
ou encore :



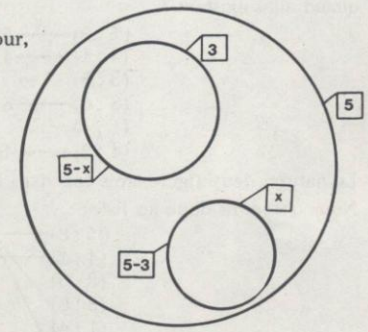
[-26-]

qui fournit l'égalité : $x = 7 - 3$
c'est-à-dire : $x = 4$

Soit encore l'équation : $5 - x = 3$
Elle donne le dessin :



qui permet, à l'aide des croix nécessaires dans chaque contour, d'obtenir directement : $x = 2$
ou encore le dessin :



qui fournit l'égalité :

$$x = 5 - 3$$
ou
$$x = 2$$

Ces dernières notations peuvent paraître aux maîtres ardues et compliquées. Avant de les étudier, nous leur laissons le soin de mettre en place celles, plus simples, que donne l'équation :

$$x - 3 = 4$$

Bien entendu, il faut proposer aux enfants des équations sans solution telles que

$$x + 5 = 2$$

$$3 - x = 4$$

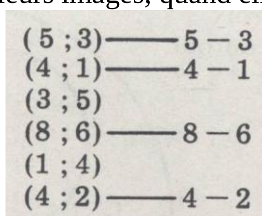
Ils voient vite qu'on ne peut faire un dessin car dans le premier cas, 5 serait le nombre d'objets d'une "petite" collection et 2 celui de la "grande", et dans le second cas, 3 serait celui de la "grande" tandis que 4 serait celui d'une "petite". [27]

Dans tous ces exercices, l'essentiel est le respect de la règle du signe "=". Les deux membres de l'équation doivent figurer dans des étiquettes accrochées au même contour.

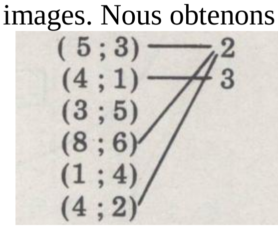
Jusqu'à présent nous n'avons parlé que de la différence entre deux naturels. Elle est liée à une situation qui exige que le premier soit supérieur au second. Précisons maintenant ce qu'est la soustraction dans N. C'est une opération qui, à deux naturels énoncés dans un ordre déterminé, donne pour image, si elle existe, la différence entre le premier et le second.

Contrairement à ce qui se passe pour l'addition, tous les couples de naturels n'auront donc pas une image par cette opération. Ainsi le couple (5 ; 3) en a une, le couple (3 ; 5) n'en a pas.

Prenons une liste de quelques couples et celle de leurs images, quand elles existent :



Le naturel deux figure trois fois dans la liste des images. Nous obtenons donc les listes



et nous décrivons la soustraction dans N à partir des trois constituants

l'ensemble de tous les couples de naturels, première liste.

l'ensemble de tous les naturels, seconde liste.

l'ensemble de tous les traits qui relient un couple à son image, quand elle existe.

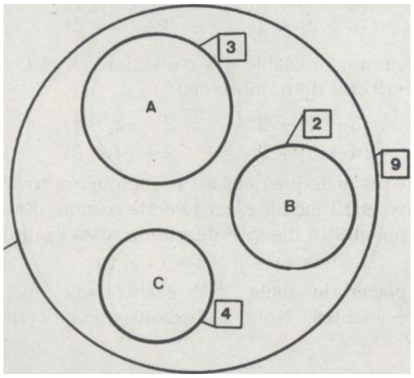
Par la loi d'addition, tout couple a une image. C'est une loi interne dans N. On peut toujours écrire la somme de deux naturels.

L'opération de soustraction ne donne pas une image à tout couple : a et b étant deux naturels distincts, elle ne donne une image qu'à l'un des deux couples (a ; b) et (b ; a). Ce n'est pas une loi de composition interne dans N. On ne peut toujours écrire la [-28-] différence entre un premier naturel et un second : l'écriture 2 - 5 est dépourvue de sens dans l'ensemble N.

4) L'itération de ces deux opérations

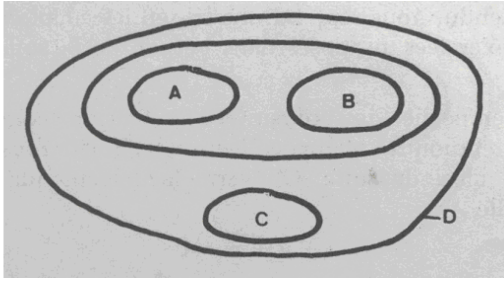
Notre situation de base a toujours été, dans l'étude précédente, celle de deux collections d'objets tous distincts réunies en une seule. Précisons bien que nous employons le terme de réunion avec son sens dans le langage courant. La notion de réunion, au sens mathématique, n'entre pas dans le cadre des programmes de 1970.

La question se pose de savoir si nous saurions nous repérer dans une extension de la situation précédente, à savoir celle de trois collections d'objets tous distincts réunies en une seule. Appelons, A, B, C ces trois collections en supposant qu'elles comportent respectivement 3, 2 et 4 objets, et désignons par D la collection formée par leur réunion.



a) Comment utiliser alors la notion de somme de deux naturels ?

L'idée vient naturellement de réunir deux "petites" collections, par exemple A et B, en une seule pour retrouver la situation bien connue.



[- 29-]

Nous savons qu'au contour représentant la collection ainsi formée, nous pouvons attacher deux étiquettes contenant les sommes :

3 + 2 et 2 + 3

Et nous voyons que la collection D est la réunion de deux collections, la collection C et celle que nous venons de constituer. Nous pouvons alors attacher 4 étiquettes au contour de la collection D dans lesquelles nous écrivons

(3 + 2) + 4   4 + (3 + 2)
(2 + 3) + 4   4 + (2 + 3)

Ces quatre écritures sont des écritures du naturel neuf.

Bien entendu nous allons recommencer en réunissant d'abord les collections B et C et nous obtiendrons quatre nouvelles écritures du nombre neuf

(2 + 4) + 3   3 + (2 + 4)
(4 + 2) + 3   3 + (4 + 2)

Enfin la réunion préalable des collections A et C nous fournira encore quatre écritures du nombre neuf

(3 + 4) + 2   2 + (3 + 4)
(4 + 3) + 2   2 + (4 + 3)

Nous pouvons dire que neuf est la somme des trois naturels 3, 2 et 4, et nous avons 12 façons d'écrire cette somme. En même temps, nous avons la possibilité d'écrire de nombreuses égalités telles que

(2 + 4) + 3 = 3 + (4 + 2)

Il suffit de placer le signe "=" entre deux quelconques des expressions précédentes. Nous utiliserons aussi l'écriture 9. Ainsi 9 = (3 + 4) + 2

Nous réduirons le nombre de ces écritures en convenant que

2 + 4 + 3

remplacera les deux expressions (2 + 4) + 3 et 2 + (4 + 3).

Avec cette convention, nous n'aurons plus que six écritures de la somme de trois naturels.

Bien entendu, nous reprendrons ici, en les adaptant à cette extension, les exercices proposés dans l'étude de la somme de deux naturels.

Rien n'empêche de poursuivre l'extension commencée par l'étude de la réunion de quatre collections d'objets tous distincts en une seule, et ainsi de suite. On verra facilement que l'expression conventionnelle

$$2 + 4 + 5 + 1 \qquad [-30-]$$

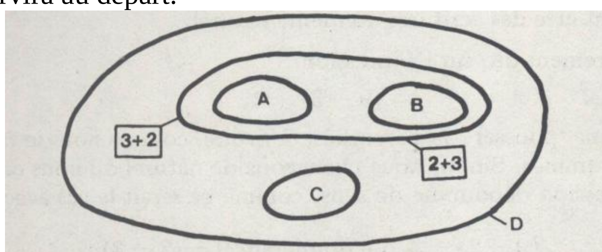
peut se lire, par exemple

	(2 + 4) + (5 + 1)	soit 6 + 6		
ou encore	2 + [(4 + 5) + 1]	soit 2 + (9 + 1)	ou	2 + 10
ou	[2 + (4 + 5)] + 1	soit (2 + 9) + 1	ou	11 + 1
ou	[(2 + 4) + 5] + 1	soit (6 +5) + 1	ou	11 + 1
ou	2 + [4 + (5 + 1)]	soit 2 + (4 + 6)	ou	2 + 10

De toutes façons nous pouvons parler de la somme de trois, quatre... naturels comme nous pouvions parler de la somme de deux naturels sans préciser leur ordre.

b) Pouvons-nous, dans cette nouvelle situation, utiliser la notion de différence de deux naturels ?

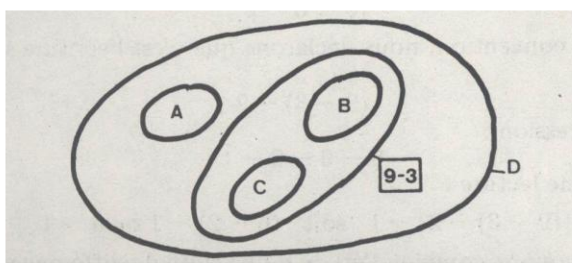
Le même procédé nous servira au départ.



Cette situation connue, où la collection D est la réunion de deux collections, nous permet d'accrocher au contour représentant C une étiquette portant

$$9 - (3 + 2)$$
$$\text{ou } 9 - (2 + 3)$$

Réunissons les collections B et C :



Nous accrocherons au contour représentant la collection ainsi obtenue une étiquette portant

$$9 - 3$$

L'examen du dessin des collections B et C réunies de cette façon nous permet alors d'accrocher au contour représentant la collection C une étiquette contenant :

$$(9 – 3) – 2 \qquad [-31-]$$

L'étude complète de la question que nous avons posée est trop complexe pour être détaillée ici. Ce qui précède nous donne deux écritures du naturel quatre

9 - (3 + 2)	soit 9 - 5
(9- 3) - 2	soit 6 - 2

La première utilise les signes "-" et "+ ", la seconde n'utilise que le signe "-".

Cela nous suffit pour voir que

$$(9- 3) - 2 = 9 - (3 + 2)$$

donc que

(9- 3) - 2 et 9 - (3 + 2)

ne peuvent être des écritures du même naturel.

Autrement dit, sur l'expression

(9 – 3) - 2

on ne peut "pousser" la parenthèse à droite, comme nous le faisions avec les sommes. Sinon, nous changeons de naturel ou nous écrivons une expression dépourvue de sens, comme ce serait le cas avec l'écriture

(9 – 2) - 3 qui donnerait 9 - (2 – 3)

Nous ne pouvons donc parler de la différence de trois naturels, alors que nous parlions de la différence de deux naturels au sens de la différence entre le plus grand des deux et le plus petit.

Les naturels (9 - 3) - 2 et 9 - (3 - 2) sont différents. Nous ne pouvons donc écrire

9 - 3 - 2

sauf, si par convention, nous déclarons que c'est l'écriture simplifiée de

(9 - 3) - 2

Alors l'expression

9 - 3 - 2 - 1

n'aura qu'une lecture

[(9 - 3) - 2] - 1 soit (6 - 2) - l ou 4 -1

Nous voyons combien l'étude d'une suite de différences est plus délicate que celle d'une suite de sommes.

C'est que l'addition est une loi associative, propriété traduite par (a + b) + c = a + (b + c) quels que soient les naturels a, b, c.

Tandis que la soustraction ne l'est pas. Nous venons de voir en effet un cas où

$(a - b) - c \neq a - (b - c)$ [-32-]

Terminons en signalant qu'on peut chercher à faire un dessin correspondant à l'expression

9 - (3 - 2)

Nous l'avons omis car, en fait, il y a plusieurs dessins possibles. Leur étude n'est pas nécessaire au contenu de ce travail.

5) La multiplication dans N

Traditionnellement, elle était présentée à partir des "grandeurs". Il s'agissait de trouver le prix de 6 livres à 3 F pièce, ou la longueur de tissu nécessaire pour faire 6 robes en sachant que la confection de chacune demande 3 m d'étoffe.

Il faudra donc que les maîtres renoncent à cette présentation et, surtout, qu'ils abandonnent radicalement les écritures telles que

6F × 3 = 18 F ou 3 × 6F = 18F
6m × 3 = 18 m ou 3 × 6m =18m

Nous savons, en effet, que le signe " = " ne peut être placé qu'entre deux écritures d'un même naturel et non entre des "grandeurs". Pour réformer les habitudes mentales, mieux vaut abandonner les notions de multiplicande (mesure d'une "grandeur") et de multiplicateur (nombre de "grandeurs", nombre de "fois").

La nouvelle situation de base est celle d'une certaine disposition, par lignes et colonnes, d'une collection d'objets. Prenons, par exemple, une collection de douze objets, et disposons ces objets de la façon suivante :

*	*	*	*
*	*	*	*
*	*	*	*

Nous voyons 3 lignes de 4 objets ou 4 colonnes de 3 objets. Cette disposition nous permet d'écrire le naturel douze sous la forme

$$4 \times 3 \text{ ou } 3 \times 4$$

que nous appelons produit des naturels 4 et 3.

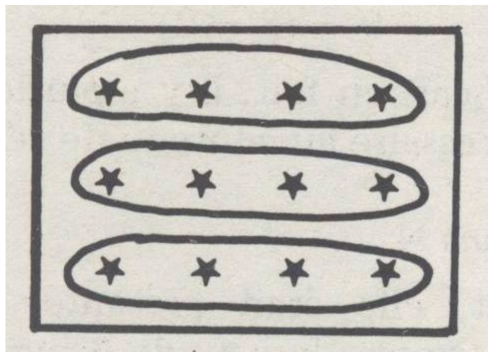
Signalons aux maîtres que cette situation est celle qui leur permettra le mieux, plus tard, d'aborder le produit de deux naturels à partir du produit cartésien de deux ensembles.

Nous pouvons tout de suite, avec ces nouvelles écritures de douze, former des égalités :

$$3 \times 4 = 4 \times 3 \qquad 4 \times 3 = 3 \times 4$$
$$12 = 3 \times 4 \qquad 3 \times 4 = 12$$
$$12 = 4 \times 3 \qquad 4 \times 3 = 12$$

[-33-]

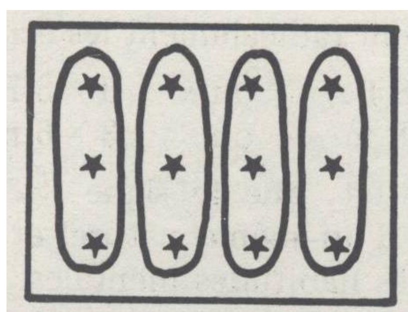
Par ailleurs, notre nouvelle situation de base n'est pas sans lien avec la précédente. Il suffit de modifier le dessin de la façon suivante :



pour retrouver l'écriture de douze sous forme de somme :

$$4 + 4 + 4$$

ou encore de la modifier ainsi :



pour obtenir la somme :

$$3 + 3 + 3 + 3$$

Nous pouvons donc passer de l'écriture d'un naturel sous forme de produit à deux écritures de ce naturel sous forme de somme de termes égaux.

Ainsi le naturel 5×2 peut s'écrire

$$2 + 2 + 2 + 2 + 2 \qquad \text{ou } 5 + 5$$
$$5 \times 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 \qquad 5 \times 2 = 5 + 5$$

De même nous pouvons écrire une somme de naturels égaux sous forme de produit.

$$7 + 7 + 7 \text{ s'écrira } \quad 7 \times 3 \quad \text{ou} \quad 3 \times 7$$
$$7 + 7 + 7 = 7 \times 3$$
$$7 + 7 + 7 = 3 \times 7$$

Nous pouvons encore, par le passage implicite au produit, remplacer une somme de naturels égaux par une autre somme, par exemple

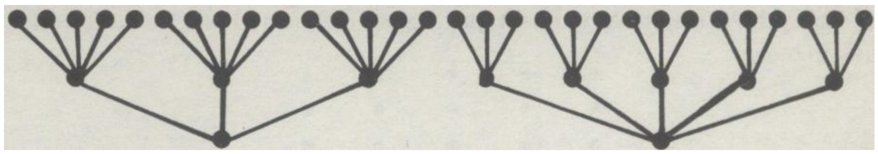
$$7 + 7 + 7 \text{ par } 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$$
$$7 + 7 + 7 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$$

Dans tout ce qui précède, la notion de produit se réfère à l'image mentale d'une collection d'objets disposés en lignes et colonnes. Ainsi en lisant

$$5 \times 3$$

nous voyons mentalement 5 lignes de 3 ou 5 colonnes de 3.

Il nous a été utile, pour l'étude de certaines propriétés du produit, de lier cette notion à un autre type d'image mentale, celle d'"arbre". Ainsi le produit 5×3 évoquera les deux images



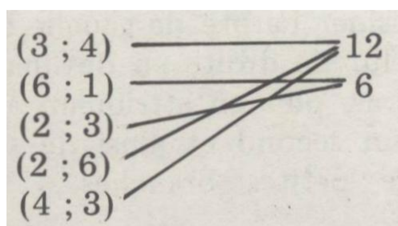
Ces deux arbres ont quinze branches, mais le premier est fait de trois bouquets de cinq tandis que le second est construit avec cinq bouquets de trois.

Si nous nous reportons à notre première image mentale, les "grosses" branches de l'arbre de gauche représentent les lignes, tandis que celles de l'arbre de droite figurent les colonnes.

La multiplication dans N peut maintenant être définie comme une loi de composition interne qui, à tout couple de naturels, donne pour image leur produit.

Prenons une liste de quelques couples et celle de leurs images

ou encore



La multiplication constituants dans N peut donc être décrite à partir de trois constituants :
l'ensemble de tous les couples de naturels,
l'ensemble des naturels,
l'ensemble de tous les traits qui relient un couple à son image.

Comme tout couple possède une image, c'est une loi de composition interne. On peut toujours écrire le produit de deux naturels. [-35-]

6) La division dans N

Puisque nous avons abandonné tout recours aux "grandeurs", il n'y aura plus les deux traditionnelles divisions, celle qui donne la "valeur d'une part", et celle qui donne le "nombre de parts" ; la seconde étant d'ailleurs réputée plus difficile que la première.

Nous conservons la situation de base précédente, disposition en lignes et colonnes d'une collection d'objets. Supposons que nous ayons quinze objets à disposer par lignes de cinq. Il suffit de faire le dessin :

• • • • •
• • • • •

● ● ● ● ●

pour voir que nous obtenons trois lignes. Bien entendu si nous avions pris une disposition par colonnes de cinq, nous aurions obtenu trois colonnes.

Ce qui nous permet d'écrire trois sous la forme

$$15 : 5$$

que nous appelons quotient de 15 par 5.

$$3 = 15 : 5$$

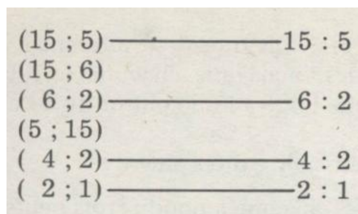
Pouvons-nous disposer les objets de cette collection par rangées de six ? On voit aisément que ce n'est pas possible.

L'expression 15 : 6 est dépourvue de sens. Il n'y a pas dans N de quotient de 15 par 6.

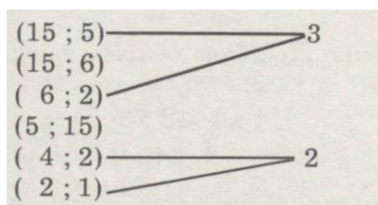
Si nous voulons nous référer à notre deuxième image mentale, il nous suffit de faire des bouquets de cinq branches pour en trouver trois, c'est-à-dire de dessiner l'arbre de gauche de haut en bas. Certains élèves utilisent celui de droite en dessinant d'abord les cinq "grosses" branches du bas, puis en attribuant à chacun d'abord un premier rameau, puis un second et ainsi de suite. Au troisième, l'arbre possède ses quinze "petites" branches.

La division dans N sera définie comme une opération interne, qui, à tout couple de naturels, donne pour image le quotient, s'il existe, du premier par le second. Ce n'est pas une loi de composition interne puisqu'il existe des couples n'ayant pas d'image par cette opération.

Prenons une liste de couples et celle de leurs images, quand elles existent.



ou encore



Nous décrivons la division dans N à partir de ses trois constituants
l'ensemble de tous les couples de naturels,
l'ensemble de tous les naturels,
l'ensemble de tous les traits reliant un couple à son image, si elle existe.

Donnons, comme nous l'avons fait pour les notions de somme et de différence, quelques exercices sur celles de produit et de quotient.

a) Habiller les images mentales par des "histoires".

Dans l'armoire, il y a trois rayons de cinq livres. Elle contient trois que multiplie cinq (ou cinq que multiplie trois) livres, c'est-à-dire quinze livres.

J'ai cinq poules. Chacune a pondu trois œufs. J'ai cinq que multiplie trois (ou trois que multiplie cinq) œufs, c'est-à-dire quinze œufs.

J'ai trois billes, j'échange chaque bille contre deux sucettes. J'ai trois que multiplie deux (ou deux que multiplie trois) sucettes, c'est-à-dire six sucettes.

J'ai cinq livres, j'échange chacun d'eux contre quatre francs. J'ai cinq que multiplie quatre (ou quatre que multiplie cinq) francs soit vingt francs.

J'ai douze neufs, avec trois œufs je fais une omelette. J'ai douze divisé par trois omelettes, c'est-à-dire quatre omelettes. [-37-]

On verra que ces "histoires" se réfèrent à l'une ou l'autre des deux images mentales, mais que chacune se refère plus facilement - sans que ce soit une loi - à l'une plutôt qu'à l'autre.

Elles peuvent aussi être dites ainsi :
J'ai cinq poules, chacune a pondu trois œufs, j'ai x œufs.

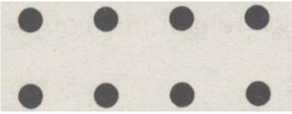
$$x = 5 \times 3 \quad \text{ou} \quad x = 3 \times 5$$
$$x = 15.$$

J'ai douze œufs, avec trois œufs, je fais une omelette. J'ai x omelettes.

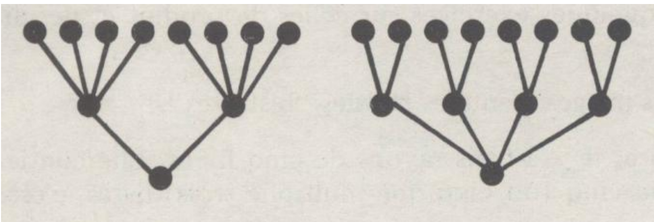
$$x = 12 : 3$$
$$x = 4$$

b) Donner un naturel écrit sous forme de produit ou de quotient, et demander les dessins correspondants.

Ainsi 4×2
donnera



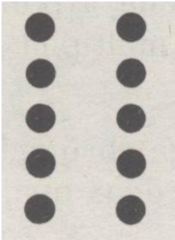
huit objets



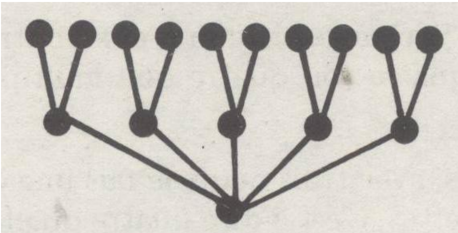
huit branches

$10 : 2$

donnera

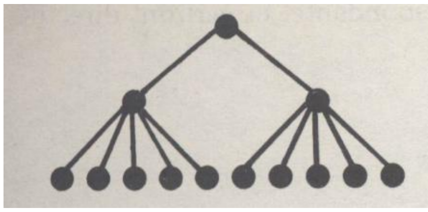


cinq rangées



cinq bouquets

ou encore [-38-]



cinq petites branches par bouquet.

c) Proposer une "équation" à résoudre à l'aide d'un dessin.

1^er^ exemple : $3 \times x = 18$

Le dessin du "rectangle" ou celui d'un arbre montre que x est le quotient de 18 par 3 :

$$x = 18 : 3$$
$$x = 6.$$

2ème exemple : $20 : x = 4$

L'un ou l'autre des dessins montre encore que x est le quotient de 20 par 4

$$x = 20 : 4$$
$$x = 5$$

Ici on peut aussi, sans que ce soit indispensable, passer par l'écriture :

$$20 = x \times 4.$$

3ème exemple : $x : 3 = 7$

Les dessins montrent que x est le produit de 3 par 7

$$x = 3 \times 7 \quad \text{ou} \quad x = 7 \times 3$$
$$x = 21.$$

Bien entendu il faut proposer aux enfants des équations sans solution telles que :

$$3 \times x = 16$$
$$10 : x = 3$$

Ils constateront l'échec des dessins, c'est-à-dire l'impossibilité d'écrire seize sous forme d'un produit dont un facteur est trois, et d'écrire trois sous forme du quotient de dix par un autre naturel.

L'utilisation des dessins, par la suite, tombera d'elle-même, les élèves remplaceront directement l'expression

$$3 \times x = 21$$
$$\text{par } x = 21 : 3$$

ou l'expression

$$x : 2 = 7$$
$$\text{par } x = 2 \times 7$$

[- 39-]

et si le maître leur propose une "histoire" du genre des précédentes, ils verront mentalement l'image correspondante, et écriront directement "l'équation".

7) L'itération de ces deux dernières lois

Il était naturel d'étendre la situation qui nous avait servi de base pour les notions de somme et de différence de deux naturels en formant la réunion de trois, quatre collections d'objets tous distincts en une seule.

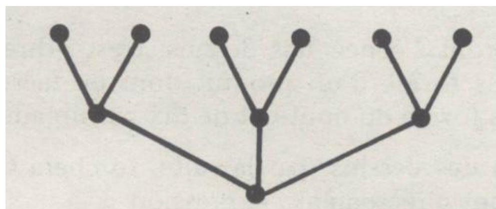
Pouvons-nous faire de même avec celle qui est à la base des notions de produit et quotient ?

Si nous utilisons la disposition des objets en un rectangle de lignes et de colonnes, nous pouvons superposer un certain nombre de tels rectangles et passer à une disposition dans l'espace. On aura, par exemple, 5 couches de rectangles à 4 lignes et 3 colonnes. Une telle organisation présente un grand intérêt et mérite d'être étudiée pour les propriétés qu'elle permet de dégager.

Par contre, son extension est impossible puisque nous ne pouvons nous représenter l'organisation des objets d'une collection dans un espace à 4 ou à 5 dimensions.

Nous utiliserons donc le dessin des arbres pour cette étude car son extension ne se heurte à aucune difficulté, en invitant toutefois le maître à utiliser la disposition dans l'espace, que nous venons de décrire, pour l'étude du produit de trois naturels.

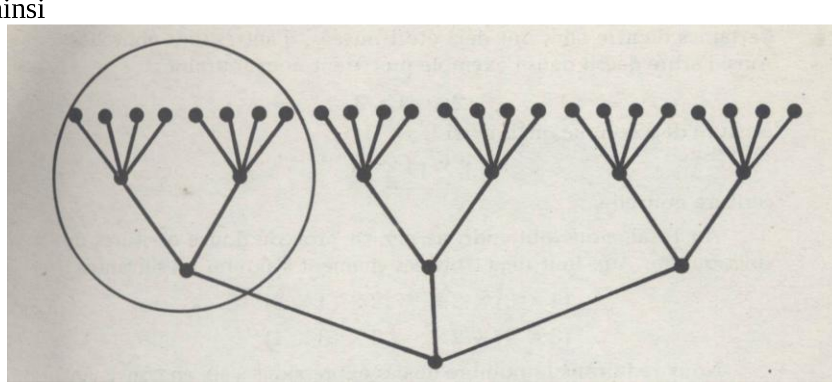
Prenons l'arbre suivant :



Nous savons que c'est le dessin des produits 3 × 2 et 2 × 3.

[-40-]

Complétons-le ainsi



Chacune des 3 × 2 ou 2 × 3 branches a donné naissance à un bouquet de 4 "très petites" branches. Nous savons donc écrire le nombre de ces nouvelles branches, c'est-à-dire vingt-quatre, sous quatre formes

$(3 \times 2) \times 4 \qquad 4 \times (3 \times 2)$

$(2 \times 3) \times 4 \qquad 4 \times (2 \times 3)$

Mais nous pouvons aussi voir l'arbre d'une autre façon. Le bouquet que nous avons entouré sur le dessin représente les produits

4×2 et 2×4.

Et les trois "grosses" branches du bas portent chacune un tel bouquet.

Ce qui donne quatre nouvelles écritures de vingt-quatre

$(4\times 2)\times 3 \qquad 3\times (4\times 2)$

$(2\times 4)\times 3 \qquad 3\times (2\times 4)$

et nous permet d'écrire de nombreuses égalités comme

$(4 \times 2) \times 3 = 2 \times (3 \times 4)$ ou $3\times (2\times 4) = 24$

Nous avons obtenu huit façons d'écrire vingt-quatre à l'aide des naturels 3, 2, 4 et du signe "× ". Il y en a-t-il d'autres ? L'idée vient de dessiner d'autres arbres ayant 3, 2, 4 branches issues des points figurant à chaque niveau. Par exemple un arbre de 2 "grandes" branches portant chacune 4 branches qui donnent elles-mêmes naissance à 3 "petites" branches.

Il est intéressant de dénombrer les arbres que nous pouvons ainsi construire, mais nous laissons la question de côté.
[-41-]

Chacun d'eux nous permet d'écrire vingt-quatre de huit façons. Certaines d'entre elles ont déjà été trouvées, d'autres sont nouvelles. Ainsi l'arbre décrit dans l'exemple précédent nous fournira

$$(2\times 4)\times 3$$

écriture déjà connue, mais aussi

$$2 \times (4 \times 3)$$

écriture[s] nouvelle[s].

Au total, nous obtiendrons par ce procédé douze écritures de vingt-quatre. Aux huit déjà trouvées viennent s'ajouter les suivantes

$$(4 \times 3) \times 2 \qquad 2 \times (4 \times 3)$$
$$(3\times 4)\times 2 \qquad 2\times (3\times 4)$$

Nous réduirons le nombre de ces expressions à six en convenant de remplacer, par exemple, les deux expressions

$$(4\times 3)\times 2 \qquad 4\times (3\times 2)$$

par une seule, à savoir

$$4\times 3\times 2$$

Nous dirons que vingt-quatre est le produit dés trois naturels 3, 2, 4, et nous aurons six façons d'écrire ce produit

$$3\times 2\times 4 \qquad 3\times 4\times 2$$
$$2\times 4\times 3 \qquad 2\times 3\times 4$$
$$4\times 2\times 3 \qquad 4\times 3\times 2$$

Rien n'empêche de poursuivre l'extension commencée, il suffit que chacune des "très petites" branches engendre un bouquet de "minuscules branches" ou "minibranches".

Comme dans le cas de la somme, on verra aisément que l'expression conventionnelle

$$7\times 2\times 5\times 4$$

peut se lire

$(7 \times 2) \times (5 \times 4)$	soit	14×20		
$7 \times [\ 2 \times (5 \times 4)\ ]$	soit	$7 \times (2 \times 20)$	ou	7×40
$7 \times [\ (2\times 5)\times 4\ ]$	soit	$7 \times (10 \times 4)$	ou	7×40
$[(7\times 2) \times 5] \times 4$ soit	$(14\times 5) \times 4$	ou 70×4		
$[7 \times (2\times 5)] \times 4$	soit	$(7\times 10)\times 4$	ou	70×4

De toutes façons, nous pouvons parler du produit de trois, quatre ... naturels comme nous pouvions parler du produit de deux, sans préciser leur ordre.
[- 42-]

Bien entendu, nous reprendrons ici, en les adaptant à cette extension, les exercices proposés dans l'étude du produit de deux naturels. S'il s'agit des "histoires", les échanges se prêtent aisément à l'extension, il suffit d'échanger de nouveau les sucettes contre des bonbons. Il est intéressant de chercher tous les arbres qui figurent, par exemple, le produit $5 \times 2 \times 4$.

Quant à la résolution des équations, elle offre une bonne gymnastique d'esprit, et un contrôle de la maîtrise des notions en jeu.

Ainsi l'équation $(3 \times x) \times 4 = 24$
pourra se lire

	$(3 \times x) \times 4 = 24$	ou	$3\times (x \times 4)=24$
et donner	$3 \times x = 24 : 4$	ou	$x \times 4 = 24 : 3$
	ou $3 \times x =6$	ou	$x \times 4 = 8$
et alors	$x = 6 : 3$	ou	$x = 8 : 4$
	ou $x = 2$	ou	$x = 2$

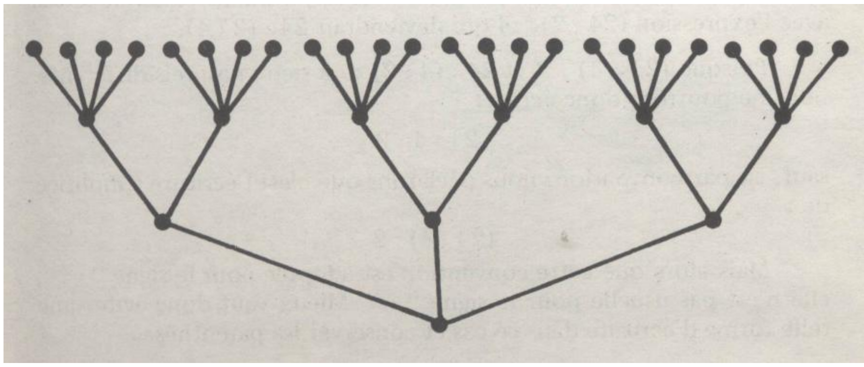
Elle pourra aussi s'écrire $(3 \times 4) \times x = 24$

et donner $12 \times x = 24$

soit $x = 24 : 12$

ou $x = 2$

Revenons maintenant à l'arbre qui nous a servi de point de départ.



[-43-]

Il possède vingt-quatre "très petites" branches en bouquets de quatre sur chaque "petite" branche.

Il y a donc 24 : 4 "petites" branches, elles-mêmes groupées en bouquets de deux sur chaque "grosse" branche.

Le nombre de grosses branches, c'est-à-dire 3 s'écrit alors :

$$(24 : 4) : 2$$

Mais si nous regardons l'arbre de la deuxième façon, nous savons que le bouquet entouré sur le dessin représente les produits :

$$2 \times 4 \text{ et } 4 \times 2$$

Chacune des "grosses" branches porte un tel bouquet. Ce qui permet d'écrire trois sous une nouvelle forme

$$24 : (4 \times 2)$$
$$\text{ou} \quad 24 : (2 \times 4)$$

Sans faire l'étude complète de la question, cela nous suffit pour écrire

$$(24 : 4) : 2 = 24 : (4 \times 2)$$

et voir que

$$(24 : 4):2 \quad \text{et} \quad 24 : (4 : 2)$$

ne peuvent être des écritures d'un même naturel.

Autrement dit, comme dans le cas de la différence, sur l'expression :

$$(24 : 4) : 2$$

on ne peut "pousser" la parenthèse à droite, comme nous pouvions le faire avec les produits. Sinon, nous changeons de naturel ou nous écrivons une expression dépourvue de sens, comme ce serait le cas avec l'expression

$$(24 : 2) : 4$$

qui deviendrait

$$24 : (2 : 4).$$

Puisque (24 : 4) : 2 et 24 : (4 : 2) sont deux naturels différents, nous ne pourrons donc écrire :

$$24 : 4 : 2$$

sauf, si, par convention, nous déclarons que c'est l'écriture simplifiée de :

$$(24 : 4) : 2.$$

Mais alors que cette convention est adoptée pour le signe " - "elle n'est pas usuelle pour le signe " : ".

Mieux vaut donc éviter une telle forme d'écriture dans ce cas et conserver les parenthèses.

[-44-]

Concluons cette étude en disant que la multiplication est associative, puisque, a, b, c étant trois naturels quelconques,

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

tandis que la division ne l'est pas.

Nous venons en effet de voir un cas où

$$(a \times b) \times c \neq a \times (b \times c)$$

8) Les opérateurs numériques

La notion d'opérateur numérique ne figurait pas dans l'enseignement traditionnel. Nous n'abordons son étude que parce qu'elle fait difficulté pour les maîtres et engendre souvent de graves confusions. Comme il est naturel, on essaie de la faire entrer dans les façons habituelles de penser. Mais c'est à faux. On croit, vaguement, que l'opérateur sert à faire une "opération", que chaque fois qu'on fait une "opération", on utilise un opérateur. La ressemblance entre les deux termes invite à ce glissement de sens.

Nous avons longuement étudié quatre "opérations" dans N. Voyons donc comment concevoir un opérateur numérique défini à partir de l'une d'entre elles, l'addition.

Imaginons la liste de tous les naturels et faisons correspondre à chacun d'eux la somme de ce naturel et de trois. Ainsi à 4 correspond 4 + 3 que nous appellerons son image.

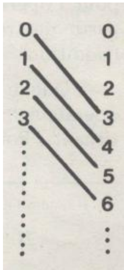
Prenons le début des listes ainsi obtenues

0 ——————— 0 + 3
1 ——————— 1 + 3
2 ——————— 2 + 3
3 ——————— 3 + 3
. . . .
. . . .

Tous les naturels ne figurent pas dans la liste de droite, nous n'y trouvons ni 0, ni 1, ni 2.

Pour mieux saisir la notion d'opérateur numérique, formons deux listes de tous les naturels, 'et relions par un trait chaque naturel de la liste' de gauche à son image dans la liste de droite. Ce qui nous donne :

Pour mieux saisir la notion d'opérateur numérique, formons deux listes de tous les naturels, et relions par un trait chaque naturel de la liste de gauche à son image dans la liste de droite. Ce qui nous donne :



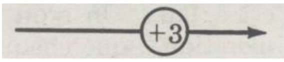
[-45-]
et nous montre

a) que tout naturel de la liste de gauche a une image dans la liste de droite,

b) qu'il y a des naturels de la liste de droite qui ne sont pas images de naturels de la liste de gauche.

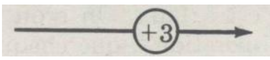
Nous décrivons alors l'opérateur numérique "additionner 3", à partir de trois constituants
- l'ensemble de tous les naturels, liste de gauche.
- l'ensemble de tous les naturels, liste de droite,
- l'ensemble de tous les traits reliant un naturel à son image,

et nous le notons, pour nous conformer aux commentaires



en sachant bien que ce symbole est la synthèse des trois éléments que nous venons d'énumérer, c'est-à-dire de trois ensembles infinis, et qu'il ne doit pas être confondu avec l'un des traits reliant un naturel à son image.

L'écriture

2  5

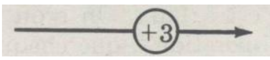
est impossible, car elle est dépourvue de sens[5].

Remarquons aussi que le " + " qui figure dans la notation de l'opérateur en fait partie intégrante, qu'on ne peut le "sortir", qu'il est purement conventionnel, qu'il n'est pas un signe d'opération, qu'il n'est pas celui qui figure dans une somme. C'est un signe prédicatoire, alors que le " + " de la somme 4 + 3 est un signe opératoire.

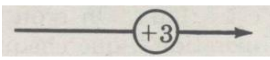
Précisons bien encore que nous n'avons aucune notation pour l'addition. Nous l'avons décrite à partir de trois constituants sans la représenter par un symbole. Alors que nous disposons d'une notation pour l'opérateur "additionner 3" que nous avons décrit, lui aussi, partir de trois constituants non dépourvus d'analogie avec ceux de l'addition.

---

[5] II faudrait écrire

N  N

et

2  2 + 3

Quelle est donc la différence fondamentale entre addition et opérateur "additionner 3" ? Elle se trouve dans le premier des constituants. Pour l'addition, c'est l'ensemble de tous les couples de naturels [-46-].

Un trait relie un couple à un naturel, image du couple par l'addition :

(2 ; 5) ———— 2 + 5

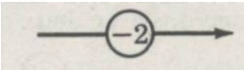
Pour l'opérateur "additionner 3", c'est l'ensemble de tous les naturels. Un trait relie un naturel à un naturel, image du premier par l'opérateur :

5 ———— 5 + 3

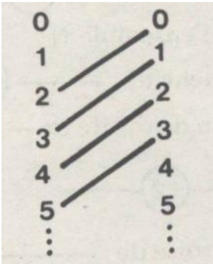
Nous voyons donc bien que, le premier constituant n'étant pas un ensemble de couples, l'opérateur n'est pas une loi de composition dans N, ce n'est pas une "opération".

Bien entendu, tout ce qui précède s'applique aux trois autres sortes d'opérateurs définies à partir des autres opérations.

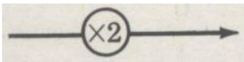
Le symbole



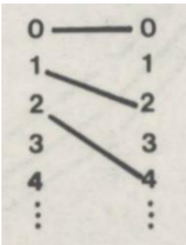
évoque le dessin



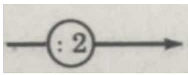
Le symbole



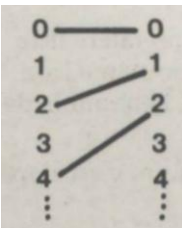
évoque :



Le symbole

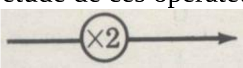


évoque :

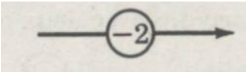


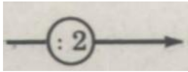
[-47-]

Sans faire l'étude de ces opérateurs, remarquons cependant qu'avec l'opérateur



tout naturel a une image, comme avec l'opérateur additif.

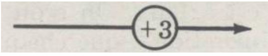
Tandis qu'avec les opérateurs 

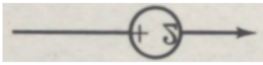
et 

tout naturel est une image : un trait arrive, en effet, sur chaque naturel de la liste de droite.

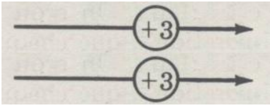
9) Composition d'opérateurs numériques de même type

Dans la description d'un opérateur, nous trouvons deux fois l'ensemble N, la liste de gauche est la même que celle de droite. D'où l'idée de faire jouer à cette liste de droite le rôle de liste de gauche d'un nouvel opérateur.

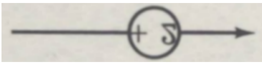
Essayons avec deux opérateurs de même type, par exemple 

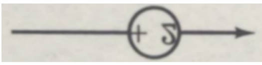


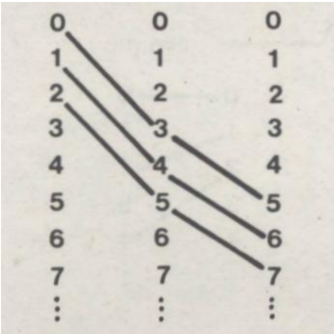
Nous trouverons deux fois l'ensemble N

- le premier est la liste de gauche de 

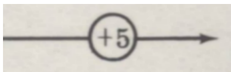
- le second est à la fois la liste de droite de

et celle de gauche de 

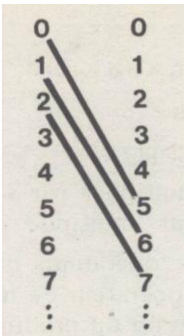
-le troisième est la liste de droite de 



La question se pose alors de savoir s'il existe un opérateur ayant
pour liste de gauche, la première liste
pour liste de droite, la troisième liste
pour ensemble de traits, l'ensemble de ceux qui relient 0 à 5, 1 à 6, 2 à 7, etc.

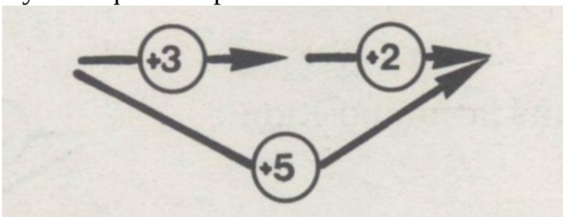
Nous savons qu'il y en a un, c'est l'opérateur 

représenté par :

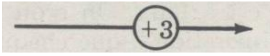
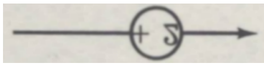


Nous dirons que nous avons composé l'opérateur "additionner 3" avec l'opérateur "additionner 2". Le composé est "l'opérateur additionner 3 suivi de l'opérateur additionner 2" et nous venons.de voir que ce composé est l'opérateur "additionner 5".

Ce que nous noterons symboliquement par



Pourquoi en est-il ainsi ?

Avec l'opérateur  un naturel quelconque, n, a pour image n + 3, et n + 3 a pour image, avec l’opérateur  (n + 3) + 2

n ——————— n + 3 —————— (n + 3) + 2

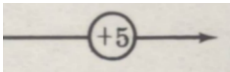
Mais puisque l'addition est une loi associative, nous savons que

(n + 3) + 2 = n + (3 + 2)

ou encore (n + 3) + 2 = n + 5

donc

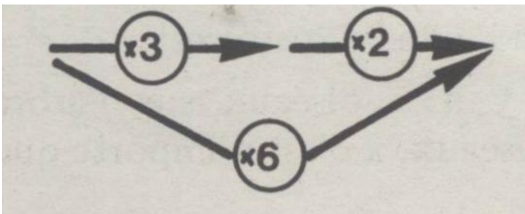
n ——————— n + 3 ——————— n + 5

Et nous savons aussi que par l'opérateur  , tout naturel n a pour image n + 5.

Le composé de deux opérateurs de type additif est un opérateur de ce type parce que l'addition est associative.

Il en sera de même pour deux opérateurs de type multiplicatif, la multiplication étant aussi une loi associative.

Nous écrirons par exemple



[- 49-]

Nous savons, en effet, que

(n × 3) × 2 = n × (3 × 2)

c'est-à-dire (n × 3) × 2 = n × 6

Ce que nous traduirons par :

Le composé "opérateur multiplier par 3 suivi de l'opérateur multiplier par 2", c'est l'opérateur "multiplier par 6".

Le composé de deux opérateurs de type additif, ou de type multiplicatif, est donc un opérateur de même type dont le symbole s'écrit à l'aide de la somme ou du produit des naturels figurant dans les symboles des deux premiers.

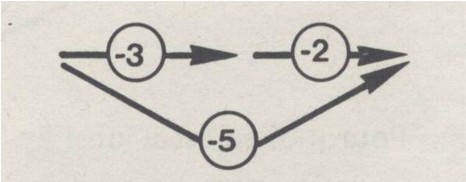
Il ne peut en être ainsi pour les opérateurs des autres types. puisque la soustraction et la division ne sont pas associatives.

Nous avons vu cependant que

(n - 3) -2 = n - (3 + 2)

c'est-à-dire (n - 3) - 2 = n - 5

Nous avons alors la composition :



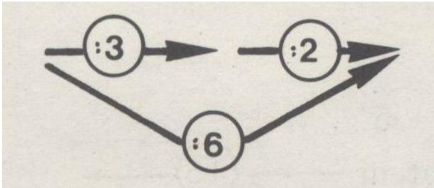
Le composé de deux opérateurs soustractifs est bien un opérateur de même type, mais son symbole s'écrit à l'aide de la somme (et non de la différence) des naturels figurant dans le symbole des deux premiers.

De même

$(n : 3) : 2 = n : (3 \times 2)$

ou $(n : 3) : 2 = n : 6$

D'où



Le symbole du composé s'écrit à l'aide du produit (et non du quotient) des naturels figurant dans le symbole des deux opérateurs.

Il est impossible, dans le cadre de ce travail, de détailler davantage l'étude de la composition des opérateurs de même type. Mais il peut être intéressant de donner aux maîtres un "habillage" de cette notion à l'aide "d'histoires".

Il y a x oiseaux sur l'arbre, il en arrive 3, puis 2. Il y a $x + 5$ oiseaux. x c'est n'importe quel nombre.

[-50-]

Il y a x oiseaux sur l'arbre, 3 s'envolent, puis 2. Il y a $x - 5$ oiseaux. x c'est n'importe quel nombre supérieur ou égal à 5.

Soulignons, à cette occasion, que si nous nous étions efforcés d'éliminer toute action se déroulant dans le temps, tout dynamisme d'ordre chronologique de la notion de somme, nous ne faisons pas de même pour celle d'opérateur. C'est qu'ici peut s'opérer le transfert à un dynamisme d'ordre logique. La notion "d'avant" dans le temps passe à celle de liste de gauche de l'opérateur, celle "d'après" à celle de liste de droite, et celle "d'action" à celle de trait joignant un élément de la liste de gauche à son image dans la liste de droite. La pensée ainsi transférée accède au statut logique, elle est réversible.

Si $x = 4$ c'est que $x + 5 = 9$

et si $x + 5 = 8$ c'est que $x = 3$

Autrement dit, si "avant" il y avait 4 oiseaux (liste de gauche), "après" il y a 9 oiseaux (liste de droite).

Et si "après" il y a 8 oiseaux (liste de droite), "avant" il y avait 3 oiseaux (liste de gauche).

Donnons encore, pour terminer, deux types "d'histoires".

J'ai x vaches, chaque vache donne 3 litres de lait ; avec un litre de lait, je fais 2 fromages. J'ai $x \times 6$ fromages ; x c'est n'importe quel nombre.

J'ai x livres, j'échange chaque livre contre 3 francs, et avec chaque franc, j'ai 2 bonbons. J'ai $x \times 6$ bonbons ; x c'est n'importe quel nombre.

J'ai x œufs, avec 3 œufs je fais une omelette, et il faut 2 omelettes par table. Je peux servir $x : 6$ tables ; x, c'est n'importe quel multiple de 6.

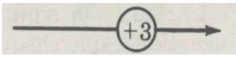
10) Composition d'opérateurs de types différents

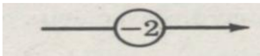
Comme nous l'avons déjà dit, l'étude des opérateurs numériques, de leur composition, n'entre pas, à proprement parler, dans les limites de ce travail consacré à la réforme des habitudes mentales des maîtres, et non à l'acquisition de notions nouvelles. Si nous l'abordons c'est pour mieux distinguer la part de chacune, ce qui relève de la nouvelle façon de penser les "opérations" dans N, de ce qui appartient au seul additif apporté par les programmes de 1970, à savoir les relations numériques.

Il nous reste cependant à essayer d'étudier une dernière réforme de la pensée traditionnelle : celle qui concerne les fractions. Nous [-51-] savons que nous ne pouvons plus asseoir une notion mathématique sur des "opérations sur les grandeurs". Plus question, donc, de prendre une "fraction d'une longueur", une "fraction d'une tarte". Le programme indique, à la place, "fractions comme opérateurs". Que faut-il entendre par là ?

Nous allons reprendre la composition de deux opérateurs dans le cas où ils sont de types différents, et pour mieux comprendre ensuite celui qui nous intéresse, nous allons d'abord examiner rapidement le cas où l'un des deux est de type additif, l'autre de type soustractif.

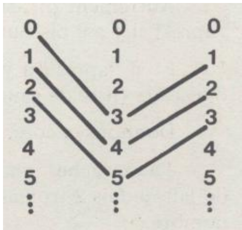
Prenons le composé



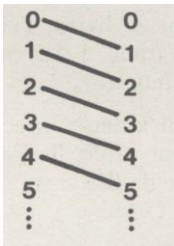


c'est-à-dire "l'opérateur additionner 3 suivi de l'opérateur soustraire 2". Ce composé est-il un opérateur appartenant à l'un des quatre types rencontrés ?

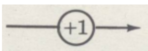
Ce dessin



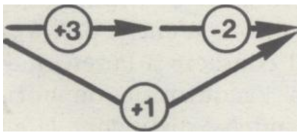
nous montre que le composé que nous cherchons est représenté par



C'est la représentation de :



Nous pouvons donc écrire :



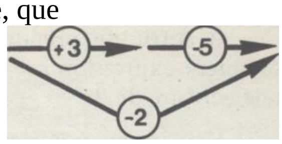
Il en est ainsi parce que si nous avions poussé l'étude de la première partie, nous aurions établi que, quel que soit le naturel n

$$(n + 3) - 2 = n + (3 - 2)$$

c'est-à-dire $(n + 3) - 2 = n + 1$.

[-52-]

Nous verrions, de façon analogue, que

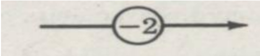


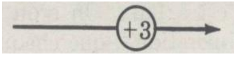
parce que, quel que soit le naturel n

$$(n + 3) - 5 = n - (5 - 3)$$

c'est-à-dire $(n + 3) - 5 = n - 2$.

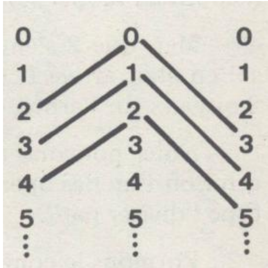
Prenons maintenant le composé



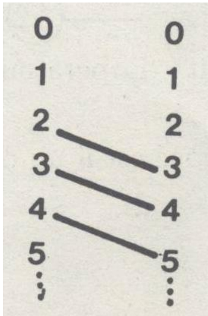


c'est-à-dire "l'opérateur soustraire 2 suivi de l'opérateur additionner 3 ". Ce composé est-il encore un opérateur appartenant à l'un des quatre types rencontrés ?

Ce dessin



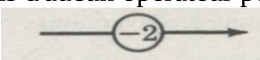
nous montre que le composé que nous cherchons est représenté par :

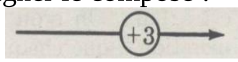


Aucun opérateur connu ne nous donne une telle représentation.

Nous avons vu, en effet, que dans la représentation de chacun d'eux, ou il part un trait de chaque naturel de la liste de gauche, ou il arrive un trait sur chaque naturel de la liste de droite. Ce n'est pas le cas ici.

Nous ne disposons d'aucun opérateur pour désigner le composé :





Il en sera ainsi chaque fois que le premier opérateur figurant dans le composé sera de type soustractif, parce qu'on ne peut mettre, quel que soit le naturel n, le signe " = " entre les expressions

$(n - 2) + 3$ et $n + 1$

[-53-]

Il suffit de prendre, pour n, le naturel 1, pour voir que la première expression est dépourvue de sens, tandis que la seconde est une écriture de 2.

Une image fera peut-être mieux comprendre la difficulté rencontrée :

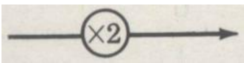
Quel que soit le nombre d'oiseaux sur un arbre, qu’'il en arrive 3, puis que 2 s'envolent, c'est comme s'il en était arrivé 1.

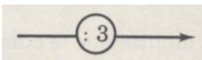
Qu'il en arrive 3, puis que 5 s'envolent, c'est comme si 2 s'étaient envolés, puisque dans les deux cas il faut qu'il y ait d'abord au moins 2 oiseaux sur l'arbre.

Mais que 2 s'envolent, puis que 3 arrivent, ce n'est pas comme s'il en était arrivé 1. Car le premier exige qu'il y ait d'abord au moins 2 oiseaux sur l'arbre, ce que ne fait pas le second.

Nous pouvons aborder maintenant le cas qui nous intéresse, celui où l'un des opérateurs est du type "multiplier par" et l'autre du type "diviser par".

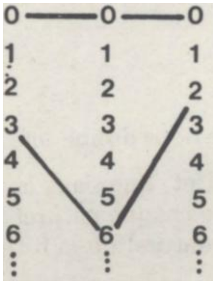
Formons le composé

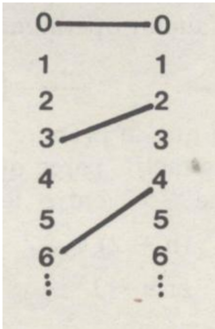




qui se lit "l'opérateur multiplier par 2 suivi de l’opérateur diviser par 3".

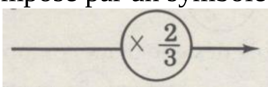
Ce composé est-il un opérateur connu ?



La représentation du composé est donc : 

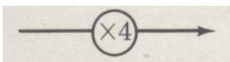
[-54-]
Ce n'est pas celle d'un opérateur connu, puisqu'il y a des naturels de la liste de gauche et des naturels de la liste de droite dépourvus de traits.

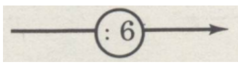
Nous désignerons cependant ce composé par un symbole



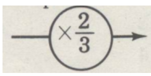
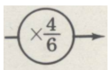
Ce sera un nouvel opérateur. Mais remarquons bien que, dans ce symbole, l'écriture $\frac{2}{3}$ est prédicatoire, elle fait partie intégrante du symbole, ce n'est pas celle d'un "nombre", d'un rationnel. On ne peut l'isoler, la faire "sortir" du symbole. Nous savions déjà qu'il en est de même du signe "× " qui y figure.

En cherchant de la même façon la représentation du composé :

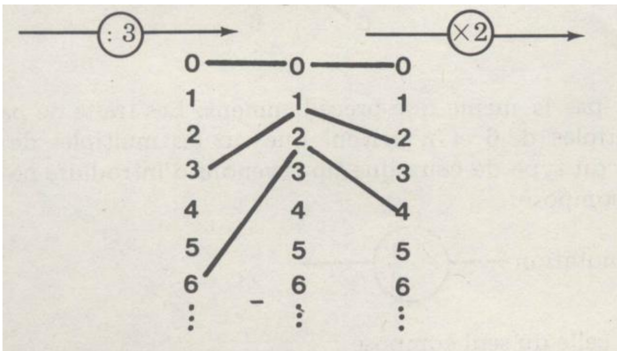




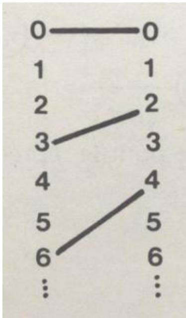
nous obtiendrions la même que la précédente : tous les multiples de 3 ont une image et ce sont les seuls naturels qui en aient une. De plus, tous les multiples de 2 sont des images, et ce sont les seuls naturels qui soient des images.

Nous disons que les opérateurs  et  sont équivalents.

Formons maintenant le composé

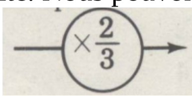


La représentation du composé est

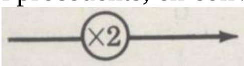
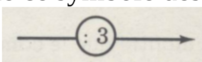


[-55-]

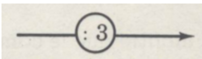
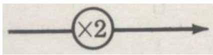
C'est encore la même que la précédente. Nous pouvons encore noter ce composé,



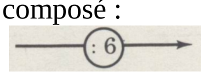
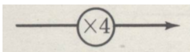
puisqu'il est équivalent aux précédents, en convenant que ce symbole désigne deux composés équivalents

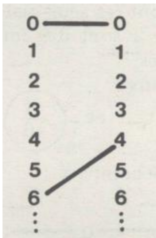
et

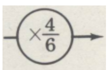
Formons alors le composé :

Nous obtenons la représentation :



Ce n'est pas la même que précédemment. Les traits ne partent que des multiples de 6 et n'arrivent que sur les multiples de 4. Aucun symbole du type de ceux que nous venons d'introduire ne peut désigner ce composé.

La notation  est donc celle du seul composé :

$\xrightarrow{(\times 4)}$ $\xrightarrow{(:6)}$

Quant au composé $\xrightarrow{(:6)}$ $\xrightarrow{(\times 4)}$ nous n'avons aucun symbole pour le représenter.

De même la notation $\xrightarrow{(\times \frac{7}{5})}$ désigne les deux composés

[-56-]

$\xrightarrow{(\times 7)}$ $\xrightarrow{(:5)}$ et $\xrightarrow{(:5)}$ $\xrightarrow{(\times 7)}$

Il en est ainsi chaque fois que les deux termes de la "fraction" sont premiers entre eux.

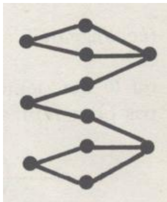
Tandis que : $\xrightarrow{(\times \frac{21}{15})}$ ne désigne que $\xrightarrow{(\times 21)}$ $\xrightarrow{(:15)}$

Ce sera le cas chaque fois que les termes de la "fraction" ne sont pas premiers entre eux. Et nous n'avons pas de symbole pour :

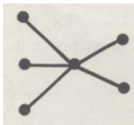
$\xrightarrow{(:15)}$ $\xrightarrow{(\times 21)}$

Ici encore, une image fera peut-être mieux comprendre la difficulté rencontrée

a) - Chaque poule pond 2 neufs. Avec 3 œufs je fais une omelette. Le dessin montre que pour chaque groupement de 3 poules, j'ai 2 omelettes.

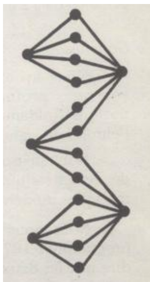


- Avec 3 pommes je fais une tarte ; avec une tarte je sers 2 personnes. Le dessin montre que pour chaque groupement de 3 pommes, deux personnes sont servies.



Dans les deux cas, il s'agit de l'échange de 3 contre 2 qui utilise l'opérateur $\xrightarrow{(\times \frac{2}{3})}$

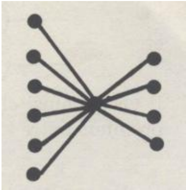
b) - Chaque poule pond 4 neufs. Avec 6 neufs je fais une omelette. Le dessin n'est autre que le premier, sur lequel chaque trait a été doublé.



[-57-]

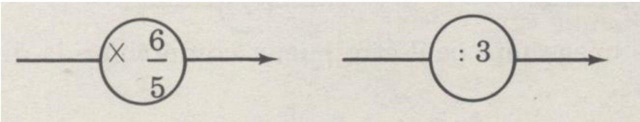
Il s'agit toujours d'un échange de 3 contre 2.

Avec 6 pommes, je fais une tarte ; avec une tarte je sers 4 personnes. Le dessin



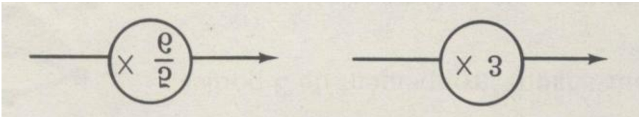
montre que les groupements doivent se faire par 6. Il s'agit, cette fois-ci, d'un échange de 6 contre 4 qu'aucun opérateur du nouveau type ne peut représenter.

L'étude de la composition de ces opérateurs déborde le cadre de notre travail. Nous laissons aux maîtres le soin de voir, par exemple, qu'ils auront toujours un opérateur pour représenter un composé du type

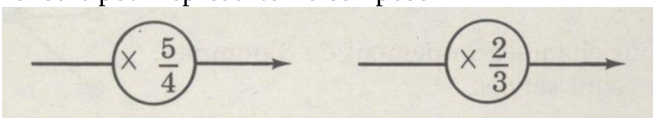


(échange de 5 contre 2)

où le deuxième opérateur est "diviser par", mais qu'ils n'en auront pas pour représenter, par exemple, le composé :



échange de 6 contre 15, ou encore pour représenter le composé



échange de 12 contre 10.

Conclusion

Nous avons voulu montrer aux maîtres comment ils peuvent repenser profondément leur enseignement, "mathématiser" les notions fondamentales de naturel, d"`opérations" dans N, ainsi que l'emploi du signe " - ", et acquérir celle d'opérateur numérique.

Nous pensons que l'effort considérable qui leur est ainsi demandé les introduira dans la voie la plus sûre pour aborder les "mathématiques modernes".

Nous nous sommes limités à l'étude de la première partie des programmes 1970, car c'est la partie mathématique. Cela ne veut pas dire que les deux autres parties n'offrent pas d'intérêt mathématique. [-58-]

Bien au contraire, elles font appel à des activités qui serviront de base aux notions fondamentales de repérage, de mesure, et susciteront de vraies démarches mathématiques de la pensée.

Toutefois nous croyons que la réforme mentale que nous demandons aux maîtres est bien première, car elle est la condition d'accès à l'esprit des programmes actuels et le début du cheminement vers de futurs programmes.

2.2 Promenade au long du programme du 2 Janvier 1970 et des commentaires qui les accompagnent

par P.JACQUEMIER -.Grenoble

Une révolution en deux temps

Le Programme du 2/1/70 et les Commentaires qui les accompagnent introduisent la Mathématique à l'École Primaire : c'est une grande nouveauté, et même une sorte de révolution. Voici seulement vingt ans, celui qui déclarait que l'enfant avait accès à la Mathématique bien avant la Cinquième était fortement contredit. Surtout s'il parlait de l'enfant ordinaire, c'est-à-dire de l'enfant ne présentant pas de don spécial : on était encore au temps du mythe de la bosse des mathématiques.

L'introduction des mathématiques modernes sera une seconde révolution. Initialement prévue pour 1971, puis 72, puis 73, elle ne se fera que quand une information suffisante aura été donnée aux maîtres.

C'est de cette seconde révolution dont tout le monde parle ; mais on peut penser dès maintenant que la première aura eu autant d'importance qu'elle.

Un regret

Que les textes de ces Programmes et Commentaires n'aient pas abondamment été distribués aux Instituteurs, et gratuitement, comme l'ont été les textes relatifs à l'Education Physique, en une brochure qui aurait d'ailleurs été beaucoup moins épaisse. Serait-elle si coûteuse ?[-59-][6]

Quand paraîtront ces lignes, ce regret ne sera peut-être plus fondé ...

Le nombre naturel

C'est le nombre entier, positif ou nul, de notre enfance. Il résulte de la considération des ensembles, disons, sans inconvénient, des collections d'objets ; c'est par là qu'il faut commencer. Une telle affirmation peut paraître banale. Il faut la répéter. Elle implique une séparation nette entre le nombre utilisé comme cardinal d'un ensemble et le nombre utilisé pour exprimer une mesure ; une séparation, nette et honnête entre : "*Il y a 6 crayons sur cette table*" et "*Ce crayon mesure 6 centimètres*".

Rupture avec les Instructions de 1945, qui déclaraient : "*On enseignera le décimètre en même temps que la dizaine*". On s'interdit d'enseigner le décimètre tant que les enfants risquent de ne pas appréhender les dix segments d'un centimètre, voire de les confondre avec les traits de division qui les limitent (et qui sont 11), et surtout tant qu'ils voient mal le rôle de ces traits lors d'une mesure.

Il faut en outre laisser intacte chez l'enfant l'idée qu'une mesure a bien des chances de ne pouvoir se traduire par un nombre naturel, et qu'il est plus honnête de parler d'encadrements.

Le maître écrit 7cm + 2cm ; il demande de traduire le signe + par ceci : dessiner un segment de 2cm dans le prolongement d'un segment de 7cm qu'il vient de dessiner. C'est beaucoup demander au signe +. Les enfants de Cours Préparatoire, en ce mois de Janvier, ne répondent pas, évidemment, puis docilement disent oui quand le maître termine le dessin. Additionner deux longueurs est une opération mentale plus complexe qu'additionner les cardinaux de deux collections. Les difficultés des enfants viennent de là et un retour aux bûchettes ou aux jetons ne saurait les aider.

Il y a un abîme entre le discret et le continu. Le continu est remis à plus tard : la mesure a disparu du Cours Préparatoire.

Égalité

Deux semaines après la rentrée : "Tu avais deux bonbons, tu en as mangé un". Les difficultés des enfants pour traduire cette situation par 2 - 1 = 1 s'expliquent facilement : les enfants n'ont pas acquis les notions figurées par les cinq symboles que contient cette écriture d'apparence anodine. En particulier, pour le quatrième de ces symboles, on se borne généralement à dire : "Tu mets le signe = ". Cela ne donne évidemment pas la notion d'égalité, laquelle devrait précéder l'emploi du symbole qu'on utilise pour la traduire.

---

[6] [-59-] indique le bas de la page 59 dans la publication de 1972.

On a enseigné et écrit 2 + 1 = 3. On demande ensuite aux enfants de compléter ceci : * * + * = . Faut-il écrire le nombre 3 ? [-60-] ou dessiner trois petites étoiles ? Cet exercice ne fait probablement pas progresser les élèves sur la voie que l'on veut suivre. L'opération addition est définie sur les naturels, et non sur des petits dessins, et ce retour au concret est fâcheux. Surtout s'il n'est qu'un demi-retour : faire écrire * * + * = 3 donne des idées fausses puisque le membre de gauche semble être une collection d'objets alors que celui de droite est un caractère de cette collection : le signe = ne saurait être écrit entre eux.

D'une façon générale, lorsqu'on écrit a = b, c'est que les symboles a et b désignent le même objet (ce sont là les termes mêmes des Commentaires). Par exemple 5 + 3 et 8.

Le sens des mots égal, égalité, a changé. Il n'y a pas si longtemps qu'on disait 5 + 3 font 8, avec un pluriel qui laisse entendre que le mot plus est remplaçable par la conjonction et ; ce 5 et ce 3 étaient actifs ; à eux deux, ils faisaient quelque chose, le signe = traduisait cette action (à tel point qu'on n'écrivait pas 8 = 5 + 3 ; cette non-commutativité de l'égalité a gêné des générations d'écoliers devenus lycéens).

On n'écrivait pas non plus 3 = 3, comme l'indiquaient explicitement les Instructions de 1945, essentiellement parce que cela ne traduisait aucune action (et aussi parce que cela ne sert pas à grand chose). On demandait à l'élève interrogé de répondre à 5 + 3 ; 5 + 3 était une sorte de question ; c'était un état initial qui évoluait nécessairement vers l'état final 8. 5 + 3 = 8 exprime maintenant que 5 + 3 et 8 sont deux dénominations d'un même objet, et n'exprime rien d'autre.

Égal n'a pas même sens non plus pour nous que pour Rémy de Gourmont qui décrivait de la façon suivante, voici 80 ans, la fécondation découverte depuis peu : "Du mâle A, de la femelle B, naissent, sans fécondation aucune, spontanément, de petits mâles a et de petites femelles b. Ces petits mâles sont appelés spermatozoïdes, ces petites femelles ovules. C'est entre ces deux êtres nouveaux que se produit la conjugaison fécondatrice. On voit alors a et b se résoudre en un troisième animal *x*, lequel, par accroissement naturel, deviendra soit A soit B."

On clarifie sans doute les choses en évitant de parler d'égalité quand il n'y a que ressemblance, en s'interdisant d'écrire que le fils *x devient* le père A, ou que la fille *x devient* la mère B.

"Le carré a quatre côtés égaux." Ils ne sauraient l'être, puisqu'ils sont des objets distincts. "Quatre côtés qui sont les mêmes" dit-on parfois, au risque d'être incompréhensible. Ce sont les mesures des côtés qui sont égales.

"Lorsqu'on écrit un zéro à la droite d'un naturel, ce naturel *devient* dix fois plus grand." "Diviser un nombre par 100, c'est [-61-] *le rendre* 100 fois plus petit." Ces naturels qui en deviennent d'autres sont probablement à l'origine d'incompréhensions diverses.

Soustraction, au Cours Préparatoire et ailleurs

Présenter la soustraction 8 - 5 à l'aide des mots six, sept, huit, cela n'apprend pas grand-chose aux enfants.

La présenter à l'aide d'une collection de 8 jetons et d'une collection de 5 autres jetons, ce n'est pas infaisable, mais cela risque fort de ne pas être clair : il y a trop d'objets.

"8 escargots sont dessinés ; il y en a 5 qui partent. Qu'est-ce qu'il faut mettre ? " L'enfant ne sait répondre ; son voisin répond pour lui : "Le trait". Que le sens de la soustraction ne soit pas acquis, ce n'est ni grave, ni surprenant ; mais ce n'est pas en se référant à une attitude formelle ("Tu mets un trait" ou bien "Tu fais une soustraction") qu'on le fera acquérir. Si les enfants, pour trouver qu'il reste 3 escargots, écrivent 5 + 3 = 8, ils montrent qu'ils ont bien compris. Maîtres et élèves disaient un jour, en C.E. ou C.M., dans le feu de l'action : "Une soustraction, c'est une addition, en somme ! " C'est presque vrai ...

"Combien Pierre a-t-il d'images de plus que Claude ? " Ce problème pose des difficultés à la maîtresse. Il a sans doute manqué des exercices de comparaison des cardinaux de deux collections ; une correspondance terme à terme des images de Claude avec une partie de celles de Pierre serait utile.

Qui peut dire pourquoi, pour "poser et effectuer" une soustraction, 832 - 285, on ne se contente pas, dès le C.E.1 et pour toute la scolarité de l'élève, de ce qui est ci-contre ? Le récitatif serait celui de l'addition 5 + 7, 12 et je retiens 1, etc. On éviterait bien des misères aux enfants et bien du labeur aux maîtres. Certains ont essayé cette petite révolution, et s'en sont bien trouvés.

$$\begin{array}{r} 2\ 8\ 5 \\ +\ .\ \ .\ \ . \\ \hline 8\ 3\ 2 \end{array}$$

Division[7]

[7] Les Commentaires l'appellent "division exacte "(?), mais il ne faut pas en conclure qu'il existe pour autant

Elle est définie à partir de la multiplication comme la soustraction l'est à partir de l'addition. Les Commentaires auraient pu rédiger le paragraphe relatif à division (exacte) en le calquant exactement sur le paragraphe soustraction. Les "quatre opérations", très souvent enseignées comme isolées, ont des parentés simples.

Par contre, les Commentaires ne parlent pas de "diviser par zéro". Il a pourtant fallu, à propos des fractions, écrire " $\frac{X}{Y}$ avec $Y \neq 0$ "[-62-]. On pourrait ajouter à la fin du paragraphe 4.2.2. cette idée simple, qui aiderait beaucoup les enfants dans la suite de leurs études .

Les produits de 0 par un nombre naturel quelconque sont tous nuls :
$0 \times a = a \times 0 = 0$. Si donc on se donne un naturel b autre que 0, il n'y a aucun naturel qui puisse remplacer □ dans:

$$0 \times \square = b \quad \text{ou} \quad \square \times 0 = b,$$

ni donc dans

$$b : 0 = \square$$

Division euclidienne

Elle est enseignée depuis toujours, pour résoudre le problème suivant : placer un naturel dit dividende, parmi la suite des multiples d'un autre, non nul, dit diviseur (lequel n'est généralement pas un diviseur du premier).

A ce couple de naturels, la division euclidienne fait correspondre deux autres naturels : le quotient entier et le reste. Au couple : dividende égal à 7 et diviseur égal à 2, elle fait correspondre le quotient entier 3 et le reste 1.

La division euclidienne aurait besoin de deux signes. Un d'abord pour le quotient entier. Les Commentaires déclarent que le signe " : " est réservé exclusivement au cas où le quotient entier de la division euclidienne est aussi quotient exact : on écrira 6 : 2 = 3. Leur attitude est sage, mais ils sont muets quant au signe à employer dans les autres cas. On a parfois proposé $7 \div 2 = 3$. Il est à craindre que, à côté de 6 : 2 = 3, les maîtres continuent à écrire 7 : 2 = 3 et 7 : 2 = 3,5 , et que les enfants continuent à confondre des notions distinctes.

Un second signe à employer, pour le reste, ne serait pas superflu. Si *s* était ce signe, on écrirait 7 *s* 3 = 1.

Commutativité

La multiplication est une opération commutative.

Les Instructions de 1945 parlent en plusieurs endroits de "nombres concrets". Cette expression, qui est proprement antinomique, car un nombre ne saurait être concret, a porté grand tort à la commutativité de la multiplication. Il n'y a pas à distinguer multiplicande et multiplicateur ; si on les distingue souvent, c'est parce qu'on pense plus à ces "nombres concrets", 3 sacs de 7 oranges, 15 barriques de 228 litres, qu'à des nombres. L'emploi de ces mots ne se justifie pas (l'emploi des mots soustractande et soustracteur se justifierait ; on s'en passe aisément d'ailleurs). [-63-]

"Quelle est l'unité du multiplicande ? " Les litres. "Du multiplicateur ? " Les barriques. "Le produit a la même unité que le multiplicande" déclare la maître. Puis, se ravisant à cause de cette curieuse unité barrique, injustement éliminée, et se souvenant de ses cours de Physique du Lycée : "En fait, c'est 228 litres par barrique". Cette nouvelle unité, le litre-par-barrique, ou l/ba lui fait peur et il interrompt sa lancée. Il fallait l'interrompre, bien sûr. La sagesse, même si c'est une petite révolution dans nos classes, c'est de considérer que la multiplication agit sur les naturels, que les naturels sont 15 et 228, et non 15 barriques et 228 litres.

Une pédagogie ancienne, mais pas disparue, fait dire : "Si tu veux trouver des litres, il faut que tu commences par des litres". C'est peut-être de tels dogmes, un tel arbitraire, de tels entraînements mentaux, qui empêchent les enfants de comprendre. En voici d'autres : quand on divise des francs par des francs, on ne doit pas trouver des francs ; quand on divise des litres par des vases, on trouve des litres.

Les tenants des "nombres concrets" protesteront : l'ensemble des deux mains contient 5 doigts × 2 =

---

une "division inexacte".

10 doigts. Il faudra qu'ils acceptent qu'il contient aussi bien 2 doigts × 5 (2 pouces, 2 index, etc.) ; que 3 sacs de 7 oranges contiennent 7 oranges × 3 ou aussi bien 3 oranges × 7 (3 oranges que j'ai placées dans les sacs à raison d'une par sac, puis 3 autres, etc., et ceci 7 fois). Ils en contiennent 3× 7,ou 7×3 ,ou 21.

La commutativité de la multiplication n'est pas évidente chez les enfants. Ils la découvrent quand, disposant des objets en 3 rangées de 7, ils découvrent 7 rangées de 3 ; et c'est bien là l'idée la plus simple. On peut aussi leur proposer d'envisager un produit cartésien d'ensembles ; ces mots savants ne sont rien d'autre que ceci : 3 fruits distincts, une pomme, une poire, une banane, posés de toutes les façons possibles sur 7 assiettes de couleurs distinctes, à raison d'un fruit sur une assiette comme au restaurant ; en remplissant les cases d'un tableau, ils voient, là encore, 3 colonnes de 7 cases ou 7 lignes de 3 cases.

Des situations trop concrètes, 3 sacs de 7 oranges, risquent de rendre la. commutativité moins claire. De même pour les adultes : si un pain vous nourrit 3 jours, vous mangerez 7 pains en 3 semaines puisqu'une semaine dure 7 jours ...

Tout de même, beaucoup de chemin parcouru depuis que les Instructions de 1945 déclaraient que la commutativité de la multiplication devait être apprise aux élèves non par une *preuve théorique* (que serait une preuve théorique ?) mais "par des constatations faites plus ou moins méthodiquement dans la table d'abord, ensuite sur des opérations".[-64-]

L'apprentissage par cœur primait la compréhension. La table de multiplication, toute faite, observée comme on observe une Renoncule, et la technique opératoire, toute élaborée, enseignée dogmatiquement, servaient d'arguments, sans qu'on vît dans ce cercle vicieux une mauvaise nourriture pour les enfants. Ce qu'on lit dans la table y a été mis quand on a étudié les propriétés de la multiplication, et les techniques qui permettent d'obtenir le produit de deux naturels supérieurs à 10 résultent de cette étude.

Associativité

Une grande dame, souvent ignorée à l'école élémentaire. On pourra se reporter à un article du Bulletin (N° 263, pages 333-336) où j'ai essayé de montrer la place que devrait avoir à l'école primaire cette importante propriété de l'addition et de la multiplication.

Techniques opératoires

Le maître demande : "Je paie 600 F en billets de 100 F ; combien ai-je donné de billets ? " Pour aider l'élève, il ajoute : "Quelle opération fais-tu ? ". Et l'on pose une division, et on l'effectue ... On est très près du cercle vicieux : la technique de la division, ou de la multiplication 100 × 6, résulte immédiatement des principes de la numération. Il suffit de retourner à la lecture des naturels de plusieurs chiffres ; elle contient la réponse ; la numération ne s'enseigne pas qu'au C.P.

On rencontre le produit 40×3. "Qu'a-t-il de particulier, celui-là ? " Il se termine par un zéro. On utilise le mécanisme qu'on a appris par cœur : 3 fois zéro, zéro, etc.… Mais ce mécanisme résulte des propriétés de la multiplication qui, employées seules, donneraient la réponse, sans intermédiaire. Le cercle vicieux est tout proche.

Si des enfants de C.E.1 à qui l'on dicte le naturel 57 ne savent pas l'écrire, on peut évidemment leur demander d'additionner 50 et 7, et de poser l'opération. Mais les règles qu'on leur demande d'utiliser résultent des principes de la numération ; justifier l'écriture d'un naturel de plusieurs chiffres à l'aide de ces règles, c'est encore un cercle vicieux.

Comme les deux précédents, il ressemble beaucoup au cercle vicieux décrit plus haut à propos de la commutativité de la multiplication. Tout cela ne forme guère les intelligences.

Qu'au moins on n'oublie pas que ces cas, dits particuliers, sont plus simples que le cas général, antérieurs à lui, et justement en permettent l'étude. Constater qu'un mécanisme, dont l'apprentissage est parfois laborieux, "colle bien" dans les cas simples, cela tranquillise l'élève, lui donne de l'assurance, et l'aide à retenir.[-65-]

On divise 2 790 par 275. Est-il possible que l'enfant, même en cours d'apprentissage, ne se réfère pas si aveuglément au mécanisme ? (En 279 combien de fois 275, ou en 2 combien de fois 2, etc....) Voir qu'il faut écrire 1 au quotient et que le reste est 4, c'est bien plus immédiat que ne le laisse entendre la ritournelle habituelle. Il faudrait au moins, si on fait utiliser un mécanisme dans un cas aussi simple, que ce soit, là encore, avec l'intention d'en montrer la validité. Le parallèle entre le calcul fait mentalement et le calcul qu'organise le mécanisme améliore la compréhension et, corrélativement, la mémorisation.

L'enfant doit-il comprendre le pourquoi des techniques opératoires qu'on lui enseigne ? Certainement ; au moins sur des exemples numériquement simples. Par exemple : pourquoi "pousse-t-on de deux rangs" dans la multiplication par 408 ?

"Comme j'ai multiplié le diviseur par 100, il faut aussi que je multiplie le dividende par 100". Voilà un *comme*, souvent prononcé, qui n'apporte pas grand-chose aux élèves ; il faudrait, en fait de justification, aller au-delà de cet argument, qui est du type "Pour ne pas faire de jaloux".

La division par un diviseur de deux ou plusieurs chiffres fait beaucoup souffrir les enfants. Ils souffriraient moins s'ils ne perdaient pas de vue que, là comme dans des divisions plus simples, 45 par 7 par exemple, le problème de la division euclidienne est la comparaison du dividende à certain multiple du diviseur. Ce qui traduit la division euclidienne de 162 par 74, c'est l'égalité $162 = (74 \times 2) + 14$ et l'assurance que 14 est inférieur à 74, de même que la division euclidienne de 45 par 7 se traduit par :

$45 = (7\times 6) + 3$ et $3 < 7$

Celle de 45 par 6 se traduirait par

$45 = (7\times6) + 3$ et $3<6$

Il faudrait que les enfants voient que les calculs (compliqués) qu'on leur fait faire ne sont rien d'autre que le condensé d'une multiplication et d'une soustraction - qu'on gagnerait probablement, comme on le fait dans certains pays étrangers, à écrire séparément, au moins de façon provisoire.

$$\begin{array}{r|l} 162 & 74 \\ \cline{2-2} 14 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 162 & 74 \\ \cline{2-2} \underline{148} & 2 \\ 14 & \end{array}$$

Des instituteurs demandent s'il faut faire faire des opérations en toutes bases de numération ... Certains, qui y ont pris goût, répondent : "Bien sûr". Les lignes qui suivent peuvent être proposées en une sorte de garde-fou : On pourra poursuivre l'emploi de bases plus [-66-] petites que dix, mais uniquement dans le but d'aider à la compréhension de la numération, et à la compréhension des techniques opératoires.

L'emploi des unités usuelles de temps donne l'occasion de calculs qui ont le même intérêt.

Divisibilité. Preuve par 9

Les Commentaires ne disent rien des caractères de divisibilité, ni de la preuve par 9, qui figurent explicitement dans le Programme.

Il faudrait faire la part du par-cœur. Puisque les caractères de divisibilité par 2 et par 5 résultent de façon simple des principes de la numération décimale, on peut les justifier aux enfants ; on peut de même présenter, à condition qu'on les justifie, les caractères de divisibilité par 4 et par 25. Par contre, les caractères de divisibilité par 3 et par 9 devraient : soit être énoncés sans justification, ce silence étant explicitement dit aux enfants, silence qui n'empêche pas des contrôles de leur validité sur des exemples ; soit être justifiés, ce qui est le mieux car il faut fuir le dogmatisme, mais demande une certaine préparation du terrain.

Considérations analogues pour la preuve par 9.

Colliers de perles et tableaux de nombres

"Pour une fête, des enfants font des colliers composés tous du même nombre de perles, déclarent les Commentaires. Un enfant a utilisé 345 perles pour faire 3 colliers". Il s'agit de calculer ce qu'il faut écrire dans les cases vides du tableau ci-contre.

Colliers	Perles
3	45
7	
	135

Les Commentaires poursuivent : "Il suffit de chercher l'opérateur qui fait passer de la première à la deuxième colonne : multiplier par 15". Réaction unanime d'instituteurs : "Ce 15, il faut le trouver ! ". Bien sûr. On le trouve, évidemment, par une division. Il faudra bien que l'on dise le rôle du quotient obtenu ; écrira-t-on : "Naturel par lequel il faut multiplier les naturels de la $1^{ère}$ colonne pour trouver ceux de la $2^{ème}$" ? Est-ce mieux que : "Nombre de perles de chaque collier" ? Oui si on oublie les perles et les colliers et ne regarde que le tableau ; mais cela est-il souhaitable ?

Ces tableaux me font peur. Je ne leur reproche rien, et les élèves ont besoin d'écrire beaucoup de tableaux de naturels pour aborder la notion d'application numérique. Mais je crains qu'ils ne deviennent [-67-] souvent que mnémotechniques. Voir par exemple l'usage qui se fait ordinairement des "tableaux à colonnes". Dès qu'il s'agit de convertir 3 m² en cm², ou même en dm² : "Que dois-tu faire? - Un tableau". Le tableau permet d'atteindre le résultat ; il est une façon de faire tentante, pour l'enfant et pour le maître, mais douteuse, parce qu'il invite à penser peu, ou pas.

Proportionnalité

Le mot me gêne beaucoup également. D'abord parce que les élèves ont tendance à voir de la proportionnalité partout, et les auteurs de manuels aussi, à cause de la facilité de rédiger des énoncés de problèmes ...
Ensuite parce qu'on entendra : 14 et 10 sont proportionnels à 7 et 5, ce qui est correct ; et aussi : 10 est proportionnel à 5. Il faut quatre naturels au moins pour parler de proportionnalité, et c'est beaucoup. II fut un temps où la proportionnalité était "interdite" avant la troisième, et justement pour ces raisons.

Fractions

Les Commentaires énoncent : "Les fractions sont présentées à partir de la notion d'opérateur". Ce qui laisse entendre qu'elles sont aussi autre chose. On définira en effet, à partir d'elles, les nombres rationnels, et, par abus de langage, on dira que les fractions sont des nombres ; mais cela ne se fera qu'après l'Ecole Primaire.

Les fractions se définissent ainsi : x et y désignent deux nombres naturels, le second non nul, multiplier un naturel par la fraction $\frac{x}{y}$ revient à le multiplier par x puis diviser, si cela est possible, le résultat par y.

Les enfants sortiront du C.M.2 en sachant (en principe) que $\frac{20}{8} = \frac{5}{2}$, puisque les opérateurs

$$— \boxed{\times \frac{20}{8}} \rightarrow$$

et

$$— \boxed{\times \frac{5}{2}} \rightarrow \quad ,$$

agissant sur une même série de naturels, ont le même effet, mais ils ignoreront que 2 est un nombre, qu'il est compris entre 2 et 3, et égal à 2 + $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ étant lui-même un nombre.

Par contre, ils sauront que certaines fractions sont égales à des nombres naturels (voir fin du paragraphe 6.2.) : puisque l'opérateur

$$— \boxed{\times \frac{2}{2}} \rightarrow$$

a le même effet que l'opérateur

$$— \boxed{\times 1} \rightarrow$$

[-68-]
la *fraction* $\frac{2}{2}$ est égale au *nombre* 1. On écrit de même $\frac{10}{5}$ = 2. Ces fractions se comportent comme des nombres naturels.

Il ne reste pas beaucoup à faire à propos des autres fractions en utilisant l'opérateur

$$— \boxed{\times \frac{5}{2}} \rightarrow \quad :$$

on trouve, à partir d'une même série de nombres, des nombres plus grands qu'en utilisant

$$— \boxed{\times \frac{4}{2}} \rightarrow$$

et plus petits qu'en utilisant

$$— \boxed{\times \frac{6}{2}} \rightarrow$$

On en décrétera, pourquoi pas, d'abord que $\frac{5}{2}$ est un nombre, ensuite que ce nombre est compris entre $\frac{4}{2}$ et $\frac{6}{2}$, c'est-à-dire entre 2 et 3.

Mais je ne voudrais pas alourdir le programme, qui me parait déjà chargé dans ce domaine.

Multiplication des fractions

Elle a été ôtée du programme de Sixième en 1969. Est-elle bien à sa place au C.M.2 ? On pourrait proposer une glissière de sécurité :
"A n'enseigner que si les élèves suivent bien". Réponse : la multiplication des fractions est au programme (alors que l'addition ne l'est pas). Il s'agit d'un réel changement, justifié par le fait que les fractions sont bien plus aptes à être multipliées qu'à être additionnées.

Pourcentages et numération décimale

Puisque 5 % signifie 5 pour cent, pourquoi ne voit-on pas plus souvent les enfants qui sortent de l'Ecole Primaire calculer l'intérêt annuel en lisant le nombre de centaines du nombre exprimant le capital ? Ce nombre de centaines aurait même le droit d'être décimal.

La notion de pourcentage ne figure ni dans le Programme, ni dans les Commentaires. Elle a été un chapitre important du "Calcul" qu'apprenaient les petits Français. Son écriture est un anachronisme. Le paragraphe suivant, volontairement sobre, la remettrait à sa vraie place.

Pourcentages. L'écriture 5 % désigne un opérateur qui n'est autre que

$$— \boxed{\times \frac{5}{100}} \rightarrow \quad .$$

[-69-]

Nombres décimaux

Il s'agit d'étoffe, à 18 F le mètre ; on en achète 3,15 m. Des enfants restent rétifs : ils ne multiplient pas. Ils savent quoi faire pour obtenir le prix de 3 m, mais sont arrêtés pour 3,15 m. Ces enfants sont bien formés ; la preuve, c'est justement qu'ils sont arrêtés, et qu'on voit de façon limpide pourquoi ils le sont ; le maître n'a pas l'habitude d'opérer avec eux par entraînement mental.

Leur dire : "Puisque vous multipliez par 3 dans un cas, vous devez, dans l'autre, multiplier par 3,15", cela ne les éclaire probablement pas. Si justement ils sont arrêtés, c'est qu'ils ne voient pas dans 3,15 la qualité de nombre et qu'ils ne sont pas convaincus qu'on peut, avec cette chose étrange, opérer comme avec un nombre naturel. Leur dire : "Vous faites pareil", c'est les amener à un automatisme basé sur une analogie qui, n'étant pour eux que formelle, ne les satisfait pas : ils ont besoin de justifications sur la multiplication par un nombre décimal.

Bien sûr, si on ne les leur donne pas, cela ne les empêchera pas, le pouvoir de persuasion du maître aidant, de "faire pareil" ... La docilité des enfants est souvent un obstacle à la pédagogie.

Les nombres décimaux sont des choses compliquées. Les Commentaires les abordent ainsi : La population de la France est 50, le million étant pris pour unité. Qu'un million soit unité, c'est-à-dire un, 1, il y a là quelque chose qui nous est familier, mais qui reste mystérieux. On est très près des "unités de mille", des "unités de million" (ou : "de *millions*" ?) ... Comptons sur la docilité des enfants, ici providentielle, et ne philosophons pas.

Il faudra bien un jour dire aux enfants que le nombre décimal 12,850 obtenu à partir de 12 850 par emploi d'une virgule, et le nombre 12,85 obtenu à partir de 1 285 par emploi d'une virgule, sont égaux. Peu-on le faire ici ? Les enfants ignorent que 12,850 est un nombre égal à la fraction $\frac{12850}{1000}$ et que 12,85 est égal à $\frac{1285}{100}$, fractions dont ils savent, ou sauront avant la fin du C.M.2, qu'elles sont égales. On pourra toujours leur dire que le zéro de 12,850 n'a plus le rôle de "bouche-trou" qu'il avait dans 12 850 et qu'on ne l'écrit pas ; mais c'est là un argument qui n'est que formel. Faire mieux, c'est exploiter commutativité et associativité. Mais la commodité de cette virgule, qui se déplace avec aisance quand on multiplie ou divise des nombres décimaux par 10, 100, 1 000, fera de tout cela un mécanisme vite acquis par les enfants. Le "Tu fais pareil" restera très puissant et absoudra tout. Cela semble même être l'optique des Commentaires qui, dans le paragraphe "Multiplication et division des décimaux par 10, 100, 1 000" sont fort laconiques, et se contentent de "De même". Est-ce grave ? Tout dépend du pourcentage, parmi [-70-] les enfants d'intelligence honnête, de ceux dont l'intelligence recule à cause de telles lacunes dans la parole qu'ils reçoivent. Ce pourcentage est une grande inconnue.

On aura étudié les nombres décimaux, à l'école primaire, en ignorant que le nombre 0,1 est égal à la fraction $\frac{1}{10}$. Soit.

Cela pose pourtant la question suivante : Comment se lit un nombre décimal ? Les speakers de la radio disent : "43 virgule zéro huit". Les instituteurs s'efforcent de faire lire "43 huit centièmes". Il faudrait interdire cette façon de lire, et faire employer le mot virgule. Mais interdire est inélégant (et ne serait pas simple). En outre, lire "zéro virgule zéro huit", c'est plus épeler que lire ; enfin la lecture "huit centièmes" sera déclarée bonne dès qu'on saura que $0{,}08 = \frac{8}{100}$.

Puisqu'on dit aux enfants que certaines fractions sont égales à des nombres naturels (paragraphe 6.2.), on doit pouvoir dire aussi que certaines autres sont égales à des nombres décimaux : multiplier par 0,1 les nombres 70, 320, 20, cela donne les mêmes résultats qu'utiliser l'opérateur

$$— \boxed{\times \frac{1}{10}} \rightarrow \quad .$$

Mais il faudrait pour cela que 0,1 soit une notion claire pour les enfants, et que les multiplications par 0,1 le soient aussi. Or, d'après la définition des décimaux, le nombre 0,1 est réputé être le nombre 1 quand on prend la dizaine pour unité ...

Tout cela n'est pas simple, et l'on peut se demander ce que cela donnera dans les classes. L'introduction des décimaux à l'aide de mesures avait bien des avantages. Ne pourrait-on prolonger la progression 1000 100 10 1 par un nouveau nombre sans craindre de s'aider de mesures, de changement d'unités (d'unités physiques, de longueur par excellence), de graduations sur une demi-droite ? Un segment de longueur prise pour unité accepte de se partager en 10 segments de même longueur ; le nombre 1 acceptera de donner naissance à un nombre n tel que $n \times 10 = 1$.

Retour sur les fractions

A propos de mesure, justement, les Commentaires parlent d'un quart d'heure, d'un demi-litre, de trois quarts du chemin, et même d'un quart de beurre (qui était le quart de la livre de beurre), expressions qu'on écrira probablement avec des fractions. Comme une fraction est un opérateur et que cet opérateur agit sur des nombres, ces expressions sont sans signification. Les Commentaires déclarent pourtant qu'elles pourront donner lieu à des calculs. Est-ce [-71-] reconnaître une vertu pédagogique aux 3/4 d'un segment, d'un cercle ou d'une tarte ? Là encore, je me demande un peu quel sera l'effet de ce paragraphe dans les classes ; il risque de faire perdre tout l'intérêt de la *fraction présentée comme opérateur*. Il est possible de faire la part du feu grâce au texte suivant

"*Dans ce qui précède, l'objectif a été de présenter la fraction à partir de la notion d'opérateur :*

prendre les $\frac{7}{4}$ *d'un nombre. Il n'est pas interdit d'utiliser la même locution "prendre les* $\frac{7}{4}$ *de" à propos d'une longueur, d'un poids, d'une unité physique, d'une heure par exemple, et même à propos d'un objet géométrique, d'un cercle par exemple, comme cela se fait souvent. Mais il est essentiel que l'élève voie dans une fraction son rôle d'opérateur multiplicatif*."

Mathématique et motivation. Problèmes

Je pense que la meilleure motivation de l'enseignement de la mathématique, c'est d'une part la mathématique elle-même, d'autre part l'intérêt que les enfants y prennent quand ils la pratiquent.

Les motivations "adventives" peuvent être dangereuses, autant que l'introduction coûte-que-coûte d'une leçon de mathématique dans le centre d'intérêt de la semaine. L'enseignement a certaines exigences, en particulier quant à la progression à faire suivre aux élèves.

Exemple. Cours Préparatoire. On parle de 12 *parce que* la date est mercredi 12 février, qu'on a écrite au tableau. "Qu'est-ce qu'on écrit quand on écrit mercredi ? " Le jour de la semaine. "Et février ? " Le mois. Bien. "Qu'est-ce qu'on fait quand on écrit 12 ? " On compte les jours du mois. Là, c'est nettement moins bien. On ne compte rien. On ne compte pas plus quand on baptise un jour 12 que quand on le baptise *mercredi*, pas moins, d'ailleurs : que le vocable placé sur un jour soit *mercredi* ou qu'il soit 3 (le 3ème vocable d'une certaine liste bien connue), ce n'est qu'un changement d'étiquette. La notion de nombre est plus riche que le contenu de ces étiquettes.

Chercher une motivation avec une persévérance aussi constante que celle des manuels scolaires depuis des dizaines d'années dans le calcul du prix de revient d'une clôture d'un champ à 3 rangées de fil de fer à tant le mètre, ou le kilogramme, avec des poteaux à tant la douzaine, tous les 3,50 m, espérons que cela disparaîtra progressivement, au fur et à mesure que le programme 1970 s'insinuera dans les écoles. On parviendra alors, et sans inconvénient, à ne passer aucun temps sur le célèbre : B = P.V. - P.A., bien plus omniprésent à l'Ecole Primaire que les problèmes de robinets, et dont le rôle le plus clair est de faire chavirer des enfants qui avaient à peu près bien compris addition et soustraction. [-72-]

Le jeu intellectuel que constitue la mathématique présente grandement assez d'attrait pour les enfants pour que tout habillage dit pratique, à supposer qu'il ne soit pas paralysant, soit superflu. Les "problèmes pratiques" ne sont pas exclus, bien sûr, mais ils doivent être tels que, une fois acquises les notions mathématiques nécessaires à leur résolution, ils n'embarrassent pas les enfants.

Pédagogie

J'ai peu parlé de pédagogie, de façon d'enseigner. Ce n'était pas mon sujet. Mais c'est important, bien sûr. Deux exemples pourront suffire.

Le premier, un peu caricatural, de ce qu'il faut éviter
"*Papa a 8 cigarettes (les enfants écrivent 8) ; il en fume (les enfants écrivent le signe* moins*) cinq (les enfants écrivent 5)*". Une telle pédagogie donne à l'activité de l'enfant une allure de réflexe conditionné, elle est un dressage.

Le second, choisi parmi mille autres, a de tout autres mobiles pédagogiques
Les enfants sont occupés à écrire la "table des 9", qu'il faut bien apprendre en effet. Le maître contrôle leurs écrits. Il fait réfléchir sur les chiffres des unités des produits successifs, laisse les enfants se poser des questions, en poser à leurs camarades ; dans quelques jours, le sujet a mûri, et il peut donner des explications, plus probablement les faire dire. Elles ont alors toute la valeur souhaitable de formation des intelligences.

Pour finir

(Ou plutôt ne pas finir, car le sujet est inépuisable. Il faudrait, aussi, parler des "exercices d'observation et travaux sur des objets géométriques", et des "exercices pratiques de mesure".)

Quel est l'objectif des programmes de 1970 et des Commentaires qui les accompagnent ? La réponse est claire : accès des enfants à l'activité mathématique, accès qui implique le bannissement du dogmatisme.

Les fondateurs de l'Ecole Publique prévoyaient, pour les enfants du peuple, afin qu'ils sachent voter, qu'ils apprennent à lire, écrire et compter. Compter, c'était compter les sous, savoir faire face aux situations économiques dans lesquelles ils risquaient de se trouver, savoir calculer le prix de la clôture du champ, et, pour les filles, le prix de revient du pot de confiture, savoir épargner.

Maintenant, on les invite à pratiquer la mathématique.[-73-]

La nécessaire introduction des mathématiques dites modernes se fera, après ce programme transitoire de 1970, de façon naturelle, dans le prolongement du mouvement ainsi commencé, quand les maîtres auront découvert le plaisir qu'il y a à s'évader, avec les enfants, de ces situations un peu "toujours pareil".

2.3 Quelques remarques au sujet du nouveau programme
par GAYET - Rennes

a) Cours préparatoire

Ces remarques sont la synthèse de remarques de collègues enseignant effectivement au C.P. et utilisant les fiches Touyarot.

1. Beaucoup de remarques faites par les enfants sont chargées d'affectivité. Il importe donc pour le maître de savoir ce que les enfants voient et d'utiliser ce qu'ils voient afin de les orienter dans leur recherche. Il serait donc dangereux, à partir d'une situation donnée, de préorienter les recherches des élèves sans savoir ce qu'ils ont vu.

2. Les problèmes de vocabulaire paraissent importants. Il semble indispensable de consacrer quelques séances à l'exploration des mots "même", "pareil", "chaque", "chacun", "chaque... à un".
Exemple : la même fleur (?), la même couleur, la même forme, la même école, etc...
Entourer *tous* les canards — entourer *chaque* canard — entourer *l'ensemble* des canards.

3. Il faut varier les moyens de matérialiser la correspondance terme à terme car sans quoi on aboutit à une mécanisation. Nous suggérons :
a) le trait
b) colorier un objet de A, colorier un objet de B
c) mettre un signe sous un objet de A.
un même signe ou un autre sous un objet de B.
L'utilisation unique du trait présente des inconvénients d'ordre graphique.

4. La notion de transitivité est peu ou pas perçue.
Elle intervient plus facilement lorsqu'il s'agit de trois objets semblables. Elle est très rarement faite lorsqu'on fait la correspondance terme à terme avec trois ensembles, surtout lorsqu'on utilise le trait.
[-74-] La transitivité apparaît plus clairement lorsque le trait signifie "a le même nombre d'éléments que".
Nous pensons que ceci vient du fait de la clarté graphique du schéma.

5. Possibilités d'introduction de certaines notions de manière occasionnelle.
Exemple : ensemble des oiseaux non perchés.
(logique : négation ensemble à un élément)
Introduction du mot "élément"
Tout ceci sans insister, le mot ou l'expression pouvant du fait de son audition faire écran à l'effort de compréhension.

6. Dans certaines fiches les collègues craignent que les enfants aient une vision globale du "nombre" et donc "passent à côté" de la vraie notion de nombre.
— Pour y remédier et s'assurer que la notion a été perçue correctement, il faut demander aux enfants comment ils savent qu'il y a le même nombre d'éléments car sur les fiches les situations sont figées et restent limitées dans leur utilisation.
—Il faut présenter aux élèves des situations où on ne peut pas compter le nombre d'objets (boîte de boutons et boîtes d'allumettes).
—Il faut en gymnastique présenter des situations en mouvement même avec peu d'éléments car les élèves alors ne peuvent plus compter.
Exemple : quatre garçons et quatre filles dans un coin de la cour. Ils courent. On peut demander aux élèves comment savoir s'ils sont le même nombre (réponse : en se donnant la main). On peut alors leur demander de se donner la main (un garçon, une fille) sans pour autant qu'ils s'arrêtent de courir.

7. Les élèves aiment barrer les éléments qui ne doivent pas se trouver dans un ensemble donné. Nous pensons qu'ils satisfont là leur besoin d'agressivité.

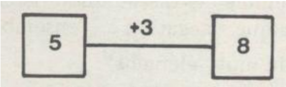
Pourquoi ne pourrait-on pas également leur demander de former un nouvel ensemble ? Ceci les oblige à tracer une patate aux contours excluant l'élément gênant. De plus on fait apparaître ainsi un ensemble à un seul élément. Pour l'instant nous n'avons pas essayé.

Dans notre groupe nous ne cherchons qu'à établir un contact entre collègues un peu désemparés devant les notions nouvelles à faire acquérir. [-75-]

b) Cours moyen

1. Les graphiques (schémas sagittaux) sont bien perçus et utilisés par les élèves. Nous pensons aussi qu'il ne faut pas avoir recours exclusivement aux graphiques et qu'il faut inciter de temps à autre les élèves à raisonner sans schéma.

2. A propos des opérateurs.

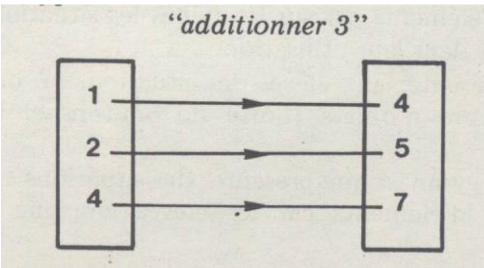
Quand on écrit 

n'y-a-t-il pas danger d'assimiler + 3 au nombre entier + 3 car en réalité ici ce qu'on cherche c'est la relation fonctionnelle "additionner 3"

Aussi nous suggérons de ne pas mettre le signe mais de préciser avant de quelle "machine" il s'agit.

Exemple : la machine "additionner".

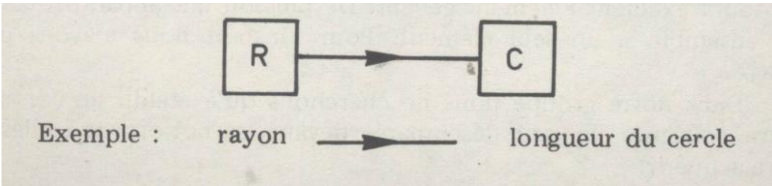
D'autre part puisqu'il s'agit d'une relation nous suggérons des exercices de ce type :



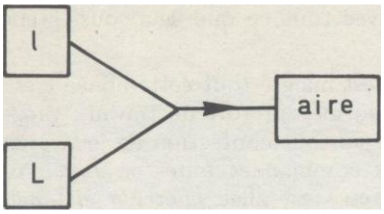
Ceci nous paraît une bonne préparation à bon nombre de notions qui seront vues au Cours Moyen et en sixième.

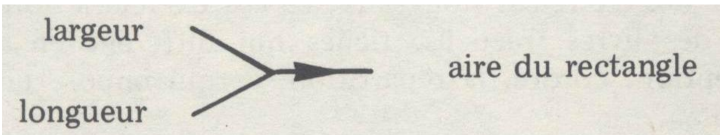
— (additionner 3) *suivie de* (additionner 5) (additionner 3 + 5)
— notion de proportionnalité
— notion d'opérations inverses
etc...

3. Un examen des problèmes du Cours Moyen fait apparaître que les élèves sont appelés à utiliser deux types de schémas logiques :



[-76-]



Exemple : 

Ces schémas logiques sont ce qu'on pourrait appeler des *schémas logiques de base*.

Un problème n'est finalement qu'une suite de schémas logiques simples, ce qu'on pourrait appeler une *chaîne logique*.

On s'aperçoit vite que les problèmes dits difficiles sont souvent les problèmes ayant des chaînes logiques très longues. Sans doute certains élèves ont difficultés car ils n'ont pas été habitués graduellement à la découverte d'une chaine logique.

Aussi nous allons essayer d'une part de faire en sorte de graduer les efforts, d'autre part d'exiger des élèves qu'avant de rédiger un problème ils en découvrent la chaîne logique.

Il n'y a sans doute là rien d'extraordinaire. C'est peut-être seulement un moyen de prendre conscience des efforts que nous demandons à nos élèves et de leur demander de réfléchir d'abord.

2.4 *Le point de vue d'une École d'application*[8]

Préambule

1/ Il ne faut pas parler de "mathématique moderne", mais seulement (circ. du 4.9.70) d'une conception différente dans la façon de se comporter devant la mathématique. Il faut donc *rénover* et non innover, et ceci de façon très prudente. Il ne faut pas perdre de vue, par exemple, qu'à la sortie de l'école élémentaire, les enfants doivent [-77-] *savoir compter,* avec tout ce que cela sous-entend. Ils ne l'apprendront pas après.

2/ La rénovation est malgré tout cette année très importante au CP et entraîne un énorme surcroît de travail : préparations nouvelles évidemment, mais surtout confection de jeux etc... Les crédits sont insuffisants et les commandes faites en *Juin* n'ont pas encore été livrées (une maîtresse est allée chercher *elle-même* ce matériel au Magasin Municipal le *22 janvier).* Il faut tirer chaque jour au duplicateur des exercices nouveaux, et ces exercices doivent être puisés dans des livres, recueils, fiches qui diffèrent en général dans la conception, l'ordre, la répartition, ce qui impose un choix long et difficile.

3/ Pour revenir sur livres et matériel : Leur abondance et notre inexpérience empêchent de trier avec certitude les bons et les moins bons.

4/ L'aide de la municipalité lyonnaise est inexistante :

a) 7 mois pour obtenir du matériel qui aurait été nécessaire au début de l'année (3 mois après la commande pourtant).

b) Nous avons eu besoin, pour improviser des tableaux horizontaux, de 3 plaques de contreplaqué (180 × 75) et de 6 panneaux d'aggloméré (100 × 50) passés à l'ardoisine. Refus du Magasin Municipal : "Rien pour la mathématique moderne" a dit M. Pradel (réponse textuelle). Nous les avons. Cela nous a coûté 120 F.

Cours Préparatoire

C'est au CP, cette année, que le changement d'état d'esprit, plus que de méthode, est le plus important.

1/ En début d'année scolaire, les exercices de classement et de rangement ont beaucoup plu aux élèves. Les passage[s] de la Maternelle à l'école élémentaire en a été facilité.

2/ Sont venus ensuite des exercices concernant les ensembles et préparant à l'étude des nombres. Beaucoup de manipulations obligent l'enfant à comprendre, mais avant tout à réfléchir, comparer, ordonner, discriminer, définir etc...
Les élèves acquièrent le souci de la précision, de la valeur exacte.

3/ Selon leur goût, les maîtresses continueront, soit de façon plus traditionnelle, soit en continuant la recherche, mais avec toujours un double souci :

a) Étude concrète par des manipulations pour arriver à l'abstraction (mais ceci n'est pas tellement nouveau). [-78-]

b) Désir de donner, quelles que soient les méthodes, les acquisitions nécessaires.

4/ Certains avantages de cette nouvelle présentation apparaissent déjà :

a) Il existe beaucoup moins de cloisonnement entre les matières enseignées. Il y a sans cesse interpénétration. Par exemple les exercices de latéralisation se font aussi bien au cours de la leçon d'Éducation Physique que de celle de calcul. De même pour les exercices de comparaison : autant, plus, moins de garçons que de filles... De même pour la compréhension des relations : a la même taille que...

b) Les jeux combinatoires ont une répercussion agréable sur les exercices de décomposition de mots en lecture

[8] Flammarion, École d'application E.N.G. Lyon [E.N.G. : École normale de garçons , MD, 2012]

et sur la formation de nouveaux mots : cette année, passage plus rapide de :

MA man et *luTIN à MA TIN* (sans syllaber!).

c) Beaucoup d'exercices sur les relations feront suite à une leçon d'élocution et seront un contrôle des connaissances acquises en vocabulaire.

Exemple : Pour les animaux de la ferme :.............. est le fils de ....

d) La répétition étant la base de notre enseignement, il est maintenant possible de répéter les notions importantes au cours d'exercices variés, ce qui enlève le fastidieux de cette répétition.

<u>Cours élémentaire</u>

1/ Allègement appréciable du programme par suppression des notions de prix d'achat, prix de revient, prix de vente, bénéfice, gain, économie, peu accessibles aux enfants.

2/ Écriture des naturels, avec introduction, par manipulation, d'autres systèmes que celui à base dix : base cinq ou quatre par exemple.

3/ Usage des opérateurs en faisant appel à la réflexion et à l'intelligence.

Exemple : Trouver l'opérateur et compléter le tableau :

	12	17	25	34	…
	7	…	…	…	…

4/ Sens des opérations.

Insister sur : la soustraction est l'inverse de l'addition — la division est l'inverse de la multiplication. [-79-]

5/ Exercices préparatoires à la résolution des problèmes en utilisant les propriétés des opérations.

Exemple : si $8 + 4 = 12$,
alors $8 = 12 - 4$
si $x + 4 = 12$,
alors $x = 12 - 4$

6/ Nombreux exercices de comparaisons, de mesures, de quadrillages etc...

7/ Insister sur un vocabulaire rigoureux et une écriture correcte des réponses.

Exemple : Prix des livres en F :
$12 \times 4 = 48$

8/ Compréhension et utilisation de signes :
$<$, $>$, $\neq$

<u>Cours Moyen</u>

Quelques nouveautés tentées ou prévues, en tenant compte du fait que la modernisation de l'approche de la mathématique ne commence vraiment que cette année à ce niveau (sauf quelques expériences tentées l'an dernier).

1/ Étude de numération avec des *bases différentes* pour arriver à la numération décimale. Cette étude nouvelle, faite en manipulant, n'a présenté aucune difficulté pour les enfants, sauf un peu au CM1 à partir du 3ème ordre.

2/ Essai de mise en évidence de relations, en commençant par des exercices ne portant pas sur des données numériques.

Exemples :

Ensemble de noms d'écrivains et ensemble d'œuvres

Ensemble de matières étudiées et jours de la semaine avec représentations sagittale et cartésienne.

3/ Ensuite, introduction des chaînes de nombres et opérateurs. Aucune difficulté.

4/ Utilisation des opérateurs

a) Il semble que ces tableaux de nombres doivent permettre une approche aisée de tous les calculs du genre : valeur totale = valeur de l'unité × nombre d'unités, et faciliter le calcul d'un des trois éléments de l'égalité.

b) Anciens problèmes de règle de trois et de grandeurs proportionnelles : Excellent (quelques réticences pour la règle de [-80-] trois à cette période de l'année).

c) Problèmes d'échelles : bien mieux que par les méthodes traditionnelles.

d) Pourcentages : des difficultés au CM1

e) Fractions : Essayé l'an dernier au CM1 avec d'assez bons résultats. Cela sera poursuivi cette année dans tous les CM en faisant tout de même appel en dernier ressort à la tarte traditionnelle. !

5/ En géométrie, beaucoup de mesures (angles, segments qu'on ajoute, retranche, multiplie, divise). La nécessité d'une unité pourra ainsi mieux être mise en évidence.

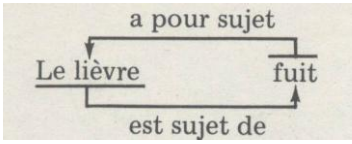
Approximation des aires des surfaces par quadrillage, permettant de montrer ce qu'est une fourchette. (un encadrement)

6/ Respect des nouvelles écritures :

-Prix en F.: 32 × 5 = 160

-Division : Indication 160 : 32 = 5 mais $\frac{124}{32} = 3{,}875$

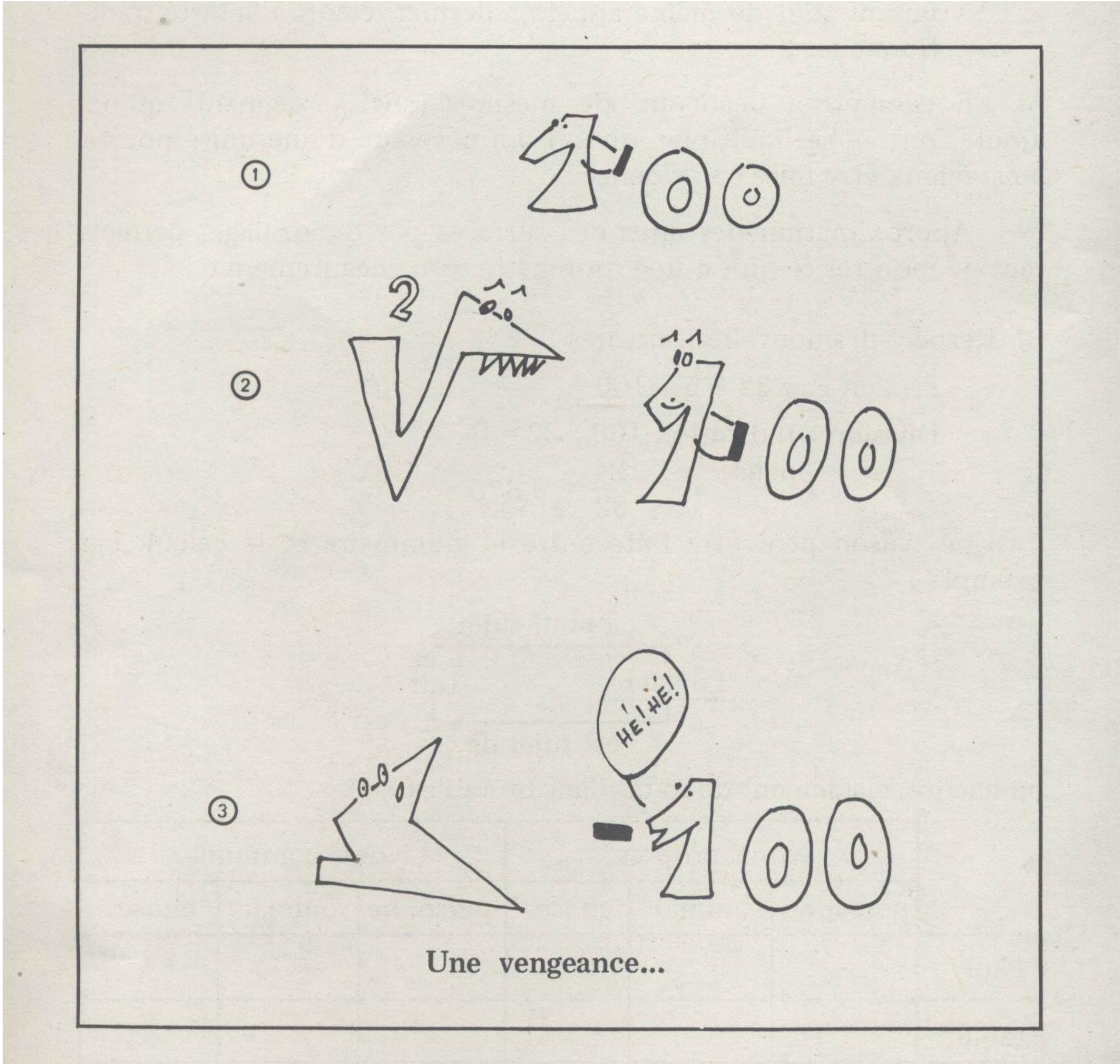
7/ Une liaison peut être faite entre la grammaire et le calcul.
Par exemple :



ou encore, classement de noms dans un tableau.

	Noms propres			Noms communs		
	personne	animal	choses	personnes	animal	choses
Paul	×					×
table						
Médor		×				
chat					×	
élève				×		
Lyon			×			

Pour cela, encore beaucoup de tâtonnements. [-81-]



Une vengeance...